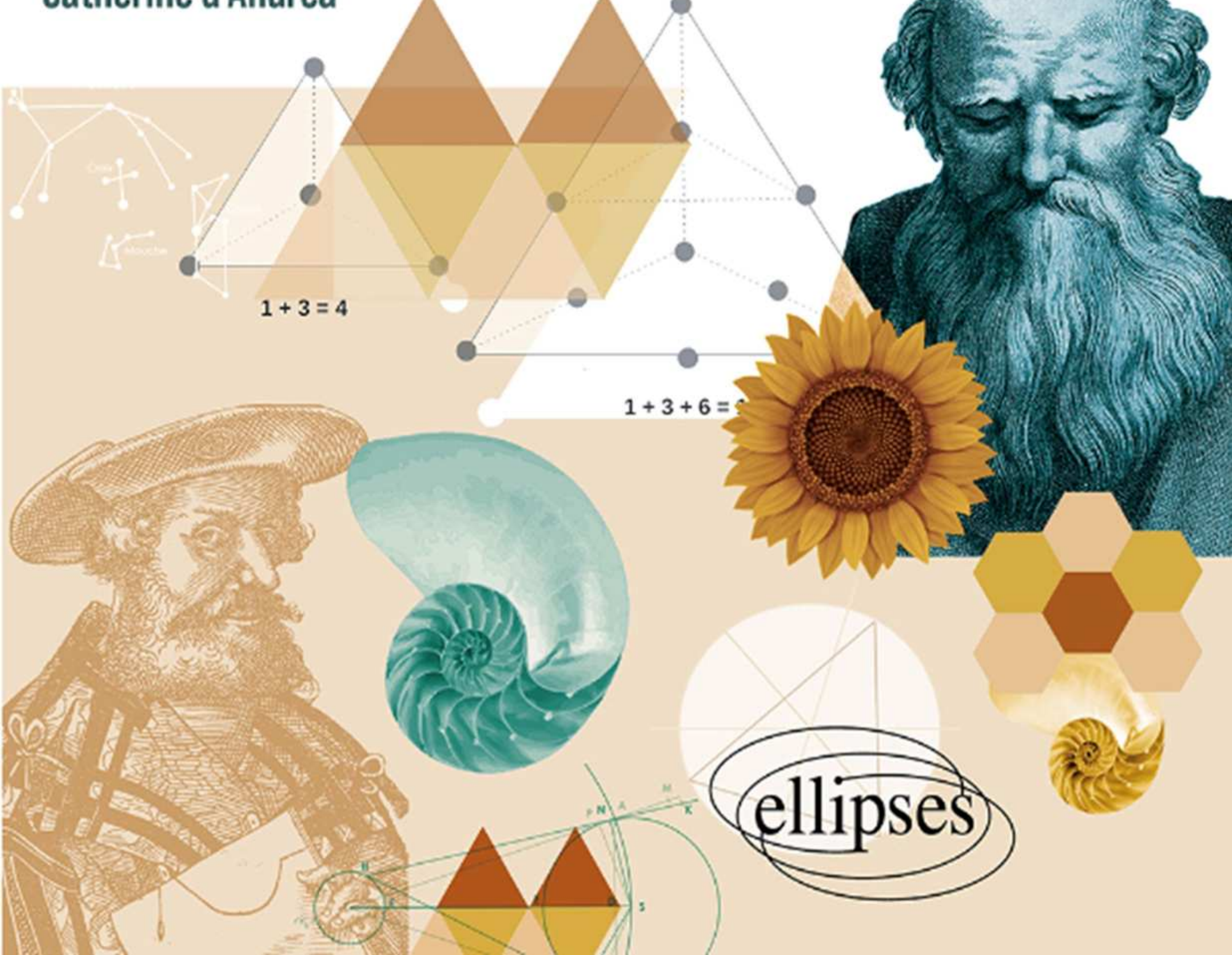
Histoire *et* légendes mathématiques

Catherine d'Andrea



ellipses

Histoire *et* légendes mathématiques

Catherine d'Andrea

ellipses

Préambule

L'histoire des mathématiques commence il y a bien longtemps : plus de 2 500 ans ! De cette époque, peu de témoignages nous sont parvenus, tous ne sont pas forcément fiables, certains même se contredisent. La vie de ces hommes d'alors a souvent pris un aspect légendaire, beaucoup d'incertitudes pesant sur leur biographie : c'est également vrai pour les pères fondateurs de la grande histoire des mathématiques, dont les héros ont été idéalisés et dont, pour beaucoup, on ne se souvient que d'un nom apposé à un théorème ou à un algorithme. Ce sont ces histoires qui sont racontées ici, avec toutes les imprécisions qui ont été imposées par le temps. Mais après tout, pourquoi se priver de cette part d'imaginaire, si elle aide à comprendre comment les mathématiques ont, de tout temps, appréhendé le monde ?

Rébarbatives, les mathématiques ? Sûrement pas, car derrière les théorèmes se trouvent des hommes que vous découvrirez à travers ce livre – depuis les mathématiciens majeurs de l'Antiquité jusqu'à ceux de la Renaissance – ainsi que les anecdotes qu'on raconte à leur sujet et leurs principaux travaux. On constatera ainsi qu'à travers les siècles, les lieux et les langages, les mathématiques sont une pensée en évolution, les travaux des uns servant de socle aux recherches des suivants. Mouvement qui permet, dans une certaine mesure, de comparer des types de raisonnement, l'évolution de la place de l'algèbre par rapport à la géométrie, les liens qui unissent les mathématiques et l'astronomie et le développement des croyances concernant la place de la Terre dans l'Univers. À travers les hauts lieux de l'histoire du savoir, la bibliothèque d'Alexandrie et la maison de la sagesse à Bagdad, on pourra également découvrir l'histoire du mode de conservation des écrits scientifiques.

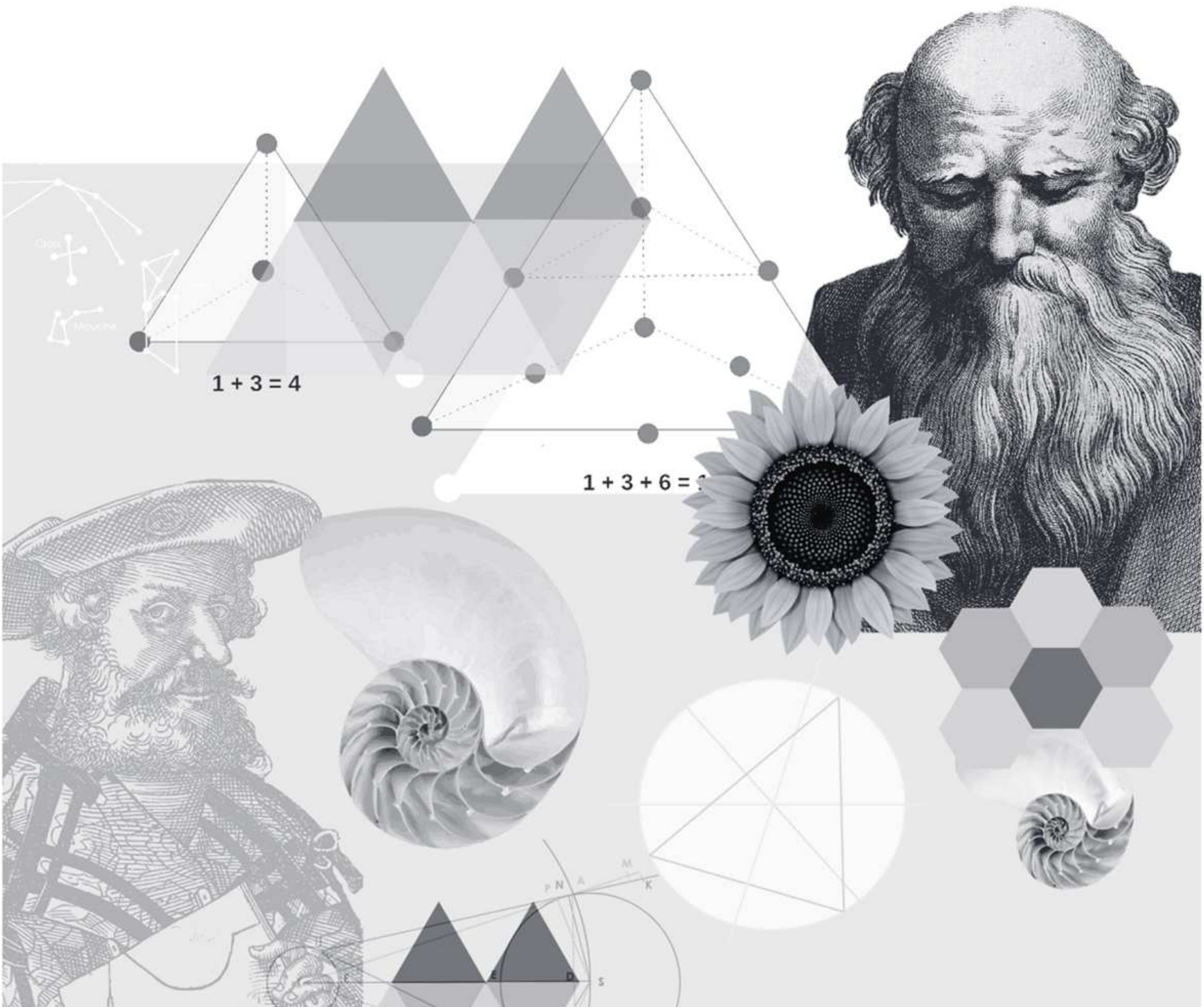
L'ambition de ce livre est de n'être ni rébarbatif ni superficiellement ludique, s'adressant à tous les curieux, du collégien motivé à l'étudiant en manque de repères, à tous ceux pour qui le cocktail constitué d'imagination et de cohérence est celui qu'il faut avoir goûté. Afin de le déguster, l'ordre chronologique préside à la construction de ce livre : chaque chapitre concernant un mathématicien est suivi d'un ou plusieurs autres concernant ses travaux, chaque partie pouvant être lue indépendamment des autres. Les écritures des démonstrations ont été modernisées autant que possible, pour simplifier leur compréhension, mais elles restent fidèles aux démonstrations d'origine.

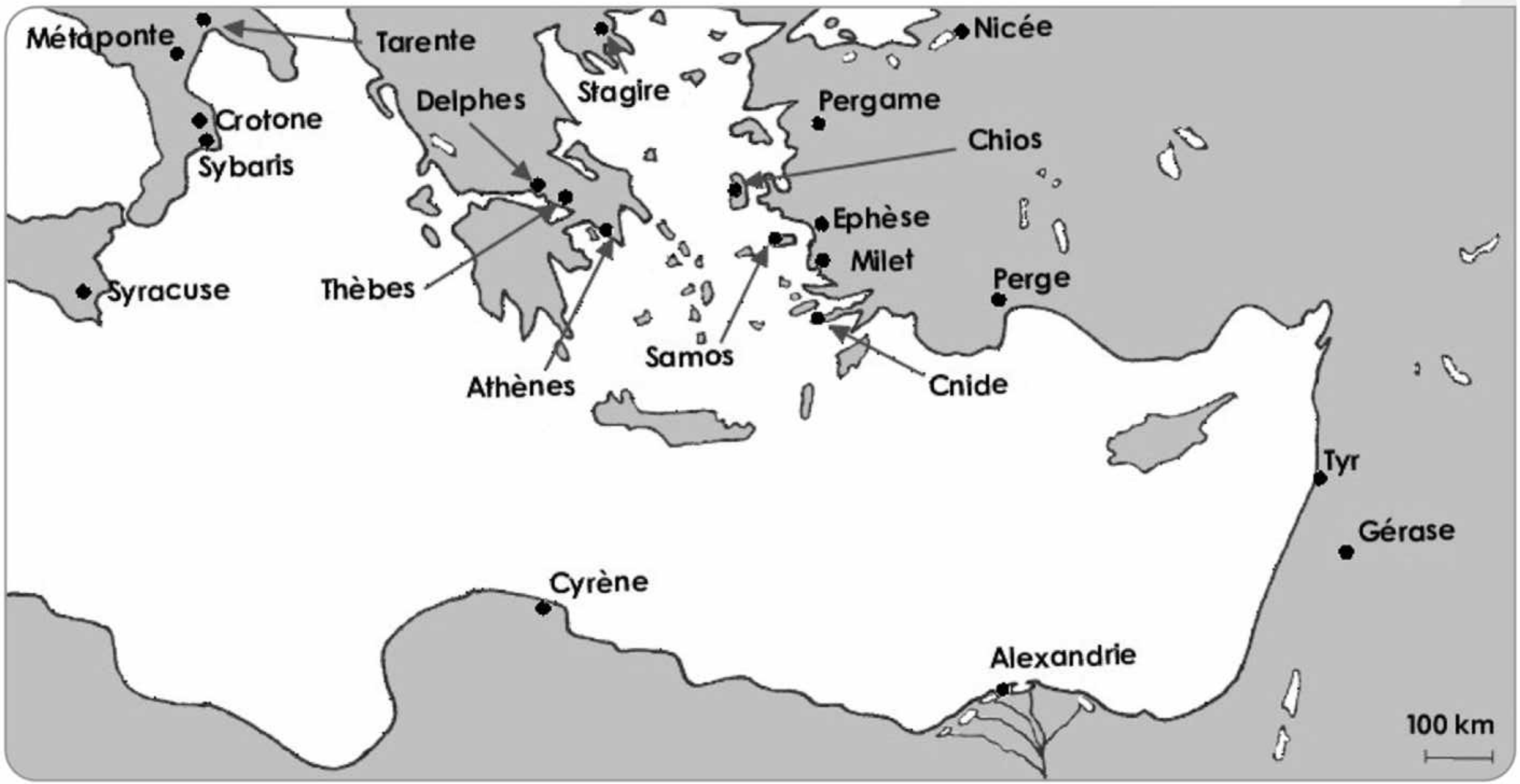
Les mathématiques sont un langage qui parle du monde au monde. J'espère qu'il vous parlera à vous aussi.

Sommaire

Partie 1.

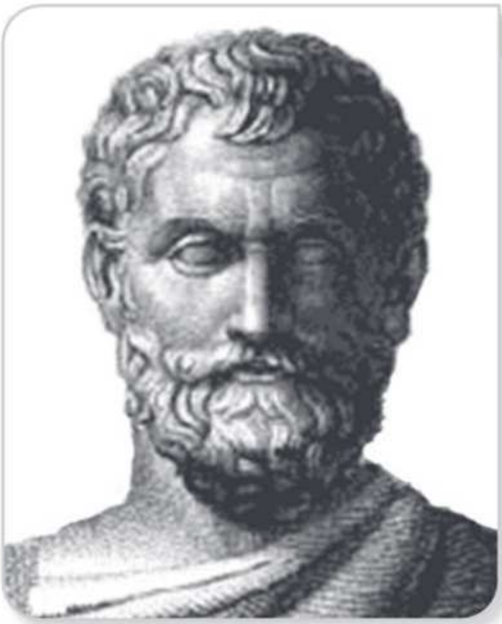
Les mathématiciens *de* l'Antiquité




Métaponte
Tarente
Crotone
Sybaris
Syracuse
Delphes
Thèbes
Athènes
Stagire
Samos
Pergame
Chios
Ephèse
Milet
Cnide
Nicée
Perge
Tyr
Gérase
Cyrène
Alexandrie
100 km

Chapitre 1.

Thalès « le Sage »



Env. 624-547 av. J.-C.

L'histoire des mathématiques grecques commence au VI^e siècle avant notre ère, à Milet. Pour situer les lieux, précisons que la ville se situait sur la côte Ouest de la Turquie actuelle. C'est de là qu'est originaire Thalès, considéré comme le premier mathématicien connu de l'Histoire. Le terme est d'ailleurs mal choisi, puisqu'il n'apparaîtra qu'un peu plus tard avec Pythagore.

Thalès n'est certainement pas le premier homme à savoir compter ou tracer des figures géométriques, mais il aime observer et réfléchir. Il s'intéresse à la géométrie, à l'astronomie, à la philosophie. Contrairement à ses contemporains, les résultats de Thalès ne concernent pas des figures particulières. Il considère les objets mathématiques de manière générale : lorsqu'il parle des propriétés du cercle, cela concerne tous les cercles, pas seulement celui qu'il vient de tracer. Il propose également des démonstrations, posant ainsi les bases du raisonnement déductif. C'est en cela que Thalès est considéré comme le premier mathématicien.

Il est marchand de profession. Et c'est un homme avisé : un jour, alors qu'il conduisait une caravane, un mulet chargé de sacs de sel tomba à l'eau au passage d'un gué. Une partie du sel se trouva ainsi dissoute. Ayant regagné la terre ferme, le mulet se sentit plus léger et au gué suivant se jeta volontairement à l'eau pour alléger à nouveau son fardeau. Afin de lui faire perdre cette fâcheuse habitude, Thalès le chargea d'éponges à l'expédition suivante.

Il fit de nombreux voyages et put acquérir un certain nombre de connaissances, en géométrie et en astronomie notamment. Époustouflé par la grandeur des pyramides de Gizeh lors d'un voyage en Égypte, il réussit avec succès à calculer la hauteur de la pyramide de Khéops. Pour le remercier de cette mesure, le Pharaon Àhmôsis II lui accorda l'accès à sa bibliothèque, qui renfermait notamment tous leurs calculs en astronomie. Grâce à ces nouvelles connaissances, il aurait prédit l'éclipse de soleil qui a eu lieu le 28 mai 585 av. J.-C. (Les Lydiens et les Mèdes, alors en guerre, en furent terrorisés et signèrent la paix). Il aurait également découvert l'inégalité des jours et des nuits suivant les saisons et qu'une année dure environ 365 jours. Enfin, il observe que la constellation de la petite ourse permet de repérer aisément l'étoile polaire et donc le Nord. Se servant de ses observations astrologiques, il découvre que la position de la Terre par rapport au Soleil permettra au climat bénéfique d'obtenir une récolte d'olives abondante la saison suivante. Il se serait débrouillé pour acquérir tous les pressoirs à huile de la région et, en imposant le prix de l'huile, il se serait alors enrichi rapidement. Il paraît que certains de ses compatriotes lui reprochaient le manque d'aspect pratique de ses recherches : Thalès venait de leur démontrer le contraire.

Muni de sa grande fortune, Thalès se consacre ensuite pleinement à l'étude de la géométrie et de la philosophie. Tout occupé à ses problèmes, il est passablement distrait. On raconte qu'alors qu'il marchait à travers la campagne en compagnie de sa servante, regardant le ciel pour y observer les astres, il ne vit pas un grand trou au milieu du chemin et tomba dedans. La jeune femme, qui elle l'avait évité, lui dit alors, en l'aidant à sortir du trou :

> « Tu n'arrives pas à voir ce qui est à tes pieds et tu crois pouvoir connaître ce qui est dans le ciel ! »

Ce serait à lui que l'on devrait la célèbre formule :

> « Connais-toi toi-même ».

Selon lui, une vie juste et bonne consiste à « s'abstenir de pratiquer ce que nous blâmons chez les autres » et lorsqu'on l'interroge sur la chose la plus étrange qu'il aurait vue, il aurait répondu : « Un tyran âgé ». Il est considéré comme l'un des sept sages de la Grèce antique. Il fonde une école à Milet, où il transmet ses connaissances à de nombreux élèves, dont un est particulièrement célèbre, puisqu'il s'agit de Pythagore.

Thalès a donc permis de fonder les bases des mathématiques, mais également de l'astronomie et de la philosophie. Il meurt vers 547 av. J.-C. Il se passionnait pour la gymnastique et on l'aurait trouvé dans les gradins, mort par déshydratation lors d'une compétition à laquelle il assistait.

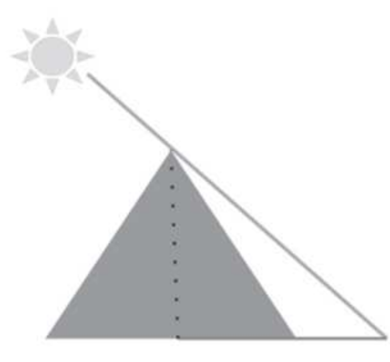
Sur son tombeau, fut inscrite cette épitaphe :

> « Ce tombeau est certes étroit, mais considère qu'il atteint les dimensions du ciel, la gloire de Thalès, l'homme très sensé. »

La mesure de la grande pyramide de Khéops

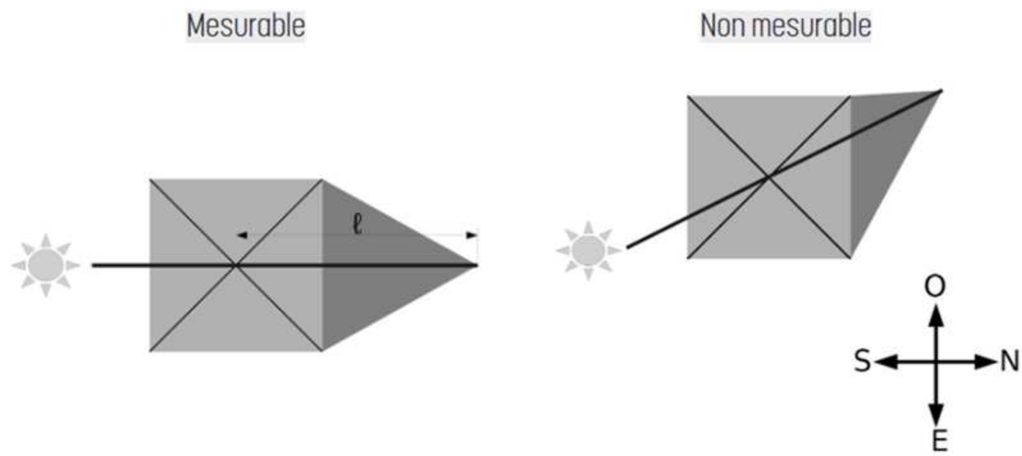
Le Pharaon Ahmôsis II aurait mis les connaissances de Thalès à l'épreuve en lui disant que personne n'était en mesure de savoir quelle était la hauteur de la Grande Pyramide de Khéops. Thalès décida donc de relever le défi en mesurant cette hauteur.

Pour commencer, il lui fallait choisir une unité de longueur : il utilisa sa propre taille et nomma cette unité « le thalès ». L'idée étant que lorsque l'ombre de Thalès sera égale à sa taille, il en sera de même pour la pyramide. Il suffira alors de mesurer la longueur de l'ombre de cette pyramide.

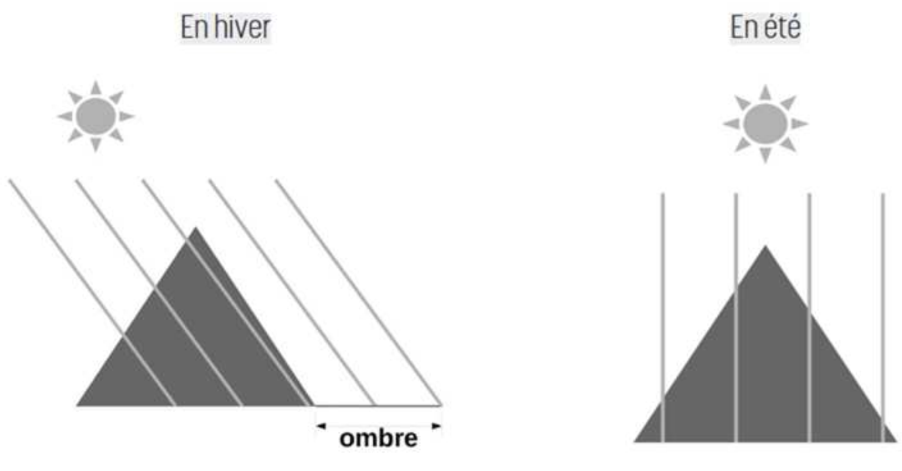


Vu ainsi, le problème a l'air assez simple : la mesure d'un obélisque, par exemple, n'aurait posé aucun problème. Mais pour une pyramide, il faut pouvoir mesurer toute la longueur de l'ombre, c'est-à-dire à partir du centre de la base, qui se trouve à un endroit inaccessible, à l'intérieur de celle-ci. Pour cela, l'ombre devait être perpendiculaire au côté du carré de base : la mesure de l'ombre est alors égale à la longueur de la moitié du côté de la base à laquelle il faut ajouter la partie de l'ombre qui dépasse de la pyramide. Donc à un moment où le soleil est orienté plein sud, c'est-à-dire à midi (heure solaire), la pyramide ayant elle-même une face orientée plein sud.

Vue de dessus :



D'autre part, le soleil doit être suffisamment bas pour que l'ombre de la pyramide dépasse au sol, donc plutôt en hiver. Gizeh étant situé à 30° de latitude Nord, il a été calculé que cela n'est possible que deux jours par an : le 21 novembre et le 20 janvier. Thalès n'a donc pas pu mesurer la hauteur de cette pyramide n'importe quand :



Il obtient 18 thalès pour l'ombre, puis il mesure la partie cachée de l'ombre, soit la moitié de la longueur du côté de la pyramide et obtient 67 thalès. La pyramide de Khéops mesure donc 18 + 67 = 85 thalès.

Or, 1 thalès vaut 3,25 coudées égyptiennes.

Donc, la pyramide fait 85 × 3,25 = 276,25 coudées.

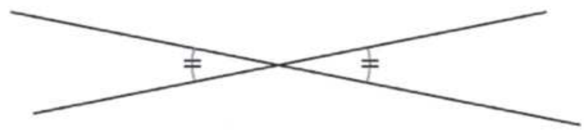
On sait aujourd'hui que la pyramide mesure 147 mètres, soit 280 coudées. La mesure de Thalès était donc assez précise.

Notons au passage que nous pouvons calculer la taille de Thalès :

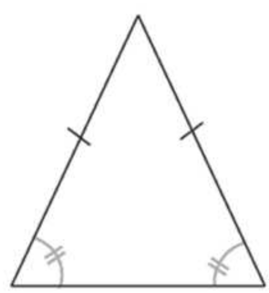
$$\frac{147}{276,25} \times 3,25 \approx 1,73 \text{ m.}$$

Les découvertes mathématiques attribuées à Thalès

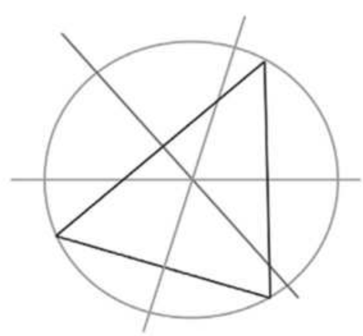
- Il considère l'angle comme un objet mathématique à part entière.
- Définition du diamètre d'un cercle.
- Deux angles opposés par le sommet sont égaux :



- Un triangle isocèle a deux angles égaux :



- Construction du cercle circonscrit à un triangle :

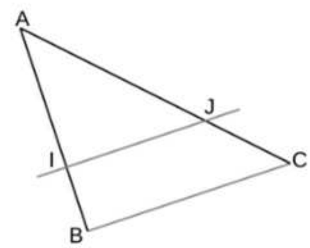


- Et bien sûr : son fameux théorème !

On peut noter à ce sujet que ce théorème n'a pas été découvert par Thalès : il était connu des Babyloniens et des Égyptiens bien avant la naissance de Thalès. Et c'est Euclide, bien plus tard, qui en donna la première démonstration. Dans les pays anglo-saxons, le théorème de Thalès correspond au théorème qui affirme qu'un triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre est un triangle rectangle. Et là, cette propriété est bien attribuée à Thalès. Le théorème qui affirme qu'une droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle sectionne ce dernier en un triangle semblable (voir énoncés précis ci-dessous) est connu chez eux sous le nom de "théorème d'intersection".

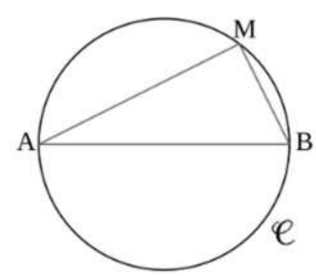
- Théorème de Thalès "français" :

Si $I \in (AB)$, si $J \in (AC)$
et si $(IJ) // (BC)$
alors $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{IJ}{BC}$.



- Théorème de Thalès "anglo-saxon" :

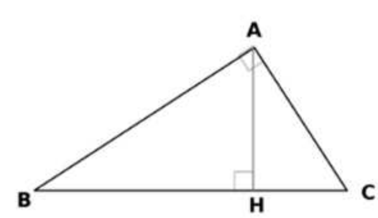
Si M est un point du cercle de diamètre [AB] alors ABC est un triangle rectangle en $\mathscr{C}$.



- Et enfin, en Suisse, le théorème de Thalès est encore différent :

$$AH^2 = HB \times HC.$$

Mais ce qui est étonnant ici, c'est que la démonstration de ce théorème nécessite l'utilisation du théorème de Pythagore.



Chapitre 2.

Pythagore « le Mythique »

Env. 580-495 av. J.-C.

Pythagore est certainement le personnage le plus fascinant de l'histoire des mathématiques. À l'instar de Thalès, il n'a laissé aucun écrit et les différents témoignages recueillis en font un personnage mythique. Il est difficile de savoir la part de légende dans la vie de ce mathématicien, à tel point que même Aristote préfère rester prudent en ne parlant que de pythagorisme.

Pythagore serait né dans l'île de Samos, au large de la Turquie, vers 580 av. J.-C. Avant sa naissance, ses parents auraient consulté la Pythie, l'oracle de Delphes. Elle leur aurait annoncé qu'ils attendaient un enfant. Il serait d'une grande beauté et ferait preuve d'une grande sagesse. Apollon serait son père ! Pythagore (Pythagoras) se traduit en effet par « celui qui a été annoncé par la Pythie ». En grandissant, il s'avère qu'il est pourvu de grandes capacités. À 18 ans, il participe aux jeux Olympiques, où il remporte l'épreuve du pugilat (c'est une sorte de boxe). Il est l'élève du théologien Phérécyde de Syros, d'Anaximandre, puis de Thalès. Celui-ci lui aurait enseigné tout ce qu'il savait, puis lui aurait conseillé de poursuivre son instruction auprès des prêtres égyptiens. Pythagore entreprend alors un long voyage qui le conduit d'abord en Syrie, puis au Liban et enfin en Égypte. Il y étudie la géométrie, l'astronomie et les rites égyptiens. Puis il part pour Babylone. Au contact des mages, il aura le loisir d'étudier les connaissances mésopotamiennes.

Lorsqu'il retourne à Samos, il décide d'enseigner ce qu'il a lui-même appris. Mais il a peu de succès. Il aurait fini par dénicher un jeune homme pauvre, dont le comportement laissait prévoir une bonne capacité d'apprentissage. Il lui aurait promis une pièce d'argent pour chaque théorème qu'il parviendrait à comprendre. Pythagore lui aurait donné les pièces comme prévu, jusqu'à ce qu'il juge son élève prêt à recevoir son enseignement gratuitement. L'élève aurait alors choisi de rembourser Pythagore, en lui rendant une pièce à chaque nouveau théorème enseigné.

Mais un désaccord oppose Pythagore au tyran Polycrate, qui gouverne Samos. Il s'exile alors et accoste à Sybaris, au sud de l'Italie, vers 536 av. J.-C. Il s'installe dans la cité voisine, à Crotone, où il fonde son école. En chemin, il avait croisé des pêcheurs : il réussit à prévoir le nombre de poissons pêchés dans leur filet, les paya, puis rejeta les poissons à l'eau. Fort de l'impression faite, sa réputation grandit et son école a cette fois-ci du succès.

Pythagore, certainement influencé par la dimension spirituelle des mages et des prêtres rencontrés lors de ses voyages, crée une nouvelle école qui prend la forme d'une congrégation religieuse. Pythagore a beaucoup de charisme : il est décrit comme étant d'une très grande beauté et ayant une éloquence subtile. Il est toujours vêtu d'une toge de lin blanche. Porphyre de Tyr raconte à son propos : « Les citoyens de Crotone comprirent qu'ils avaient affaire à un homme qui avait beaucoup voyagé, un homme exceptionnel, qui tenait de la Fortune de nombreux avantages physiques : il était, en effet, noble et élancé d'allure et, de sa voix, de son caractère et de tout le reste de sa personne émanaient une grâce et une beauté infinies. » (Porphyre, in Vie de Pythagore) On raconte aussi qu'il serait descendu aux enfers et aurait reçu la faculté de se rappeler ses 216 années de vies antérieures. Il serait également doué d'ubiquité.

À son arrivée à Crotone, Pythagore se fait un ami : Milon, qui est très impressionné par le personnage. Milon est un aristocrate qui a beaucoup de pouvoir. Il accueille souvent les pythagoriciens chez lui et prend même pour épouse la fille de Pythagore, Myïa. L'influence de Pythagore grandit et son école aussi : on voit naître dans les villes voisines des confréries qui fonctionnent sur le même modèle. Pythagore et ses disciples ont une conception oligarchique du pouvoir : il est, selon eux, inconcevable de demander son avis au peuple quant aux affaires de la cité. Ces positions politiques, favorables à l'aristocratie, ne plaisent évidemment pas à tous. À Sybaris, une révolte populaire conduit une partie des habitants à massacrer les pythagoriciens présents dans la ville. S'ensuit une guerre entre Crotone et Sybaris ; l'armée de Crotone, menée par Milon et qui défend bien évidemment les pythagoriciens, écrase celle de Sybaris ; la ville est anéantie, rasée. Mais la défiance contre les pythagoriciens continue : à Crotone vit un riche habitant du nom de Cylon. Celui-ci avait été postulant chez les pythagoriciens, mais il avait été refusé, à plusieurs reprises. Furieux, il voulait se venger. Il réussit à soulever la population de Crotone une seconde fois contre les pythagoriciens (vers 510 av. J.-C). Ils mirent le feu à la maison de Milon dans laquelle se réunissaient quarante adeptes. Tous les occupants périrent brûlés, sauf deux : Archippe et Lysis, de Tarente. Pythagore, qui n'était pas présent, survécut à l'attaque. Mais la confrérie finit par se disloquer et s'éparpiller. Pythagore se réfugie à Métaponte, au nord de Crotone, où il finira sa vie.

Les pythagoriciens ne sont pas que mathématiciens : leurs préoccupations sont également politiques et religieuses. Mais Pythagore pense que, politiquement parlant, les mathématiques peuvent fournir un modèle pour la gestion d'une cité et religieusement parlant, il croit qu'elles permettent d'accéder au divin. Les mathématiques prennent avec lui leur indépendance des choses matérielles. Les nombres existent pour eux-mêmes, ils ne sont plus assujettis à des objets. Les notions deviennent abstraites et on s'impose les démonstrations.

L'école pythagoricienne

Les conditions d'admission à l'école sont très sévères : pour être digne d'y accéder, le candidat est interrogé sur ses capacités, son éducation, son caractère et sa famille. S'il passe cette épreuve avec succès, il devient un acousmaticien (auditeur) : il peut écouter les leçons, caché derrière un rideau, mais en silence. Il n'a pas le droit d'intervenir. À l'issue de cette seconde épreuve qui dure cinq ans, il peut alors passer de l'autre côté du rideau et devenir alors un mathématicien (savant). À noter que les femmes et les étrangers sont acceptés dans l'école : c'est particulièrement moderne pour l'époque. Théanô, notamment, épouse de Pythagore, serait devenue mathématicienne. L'école pythagoricienne eut 218 membres, dont 17 femmes, en près de 150 ans d'existence.

Les règles qui sont dictées par la confrérie sont drastiques. Il faut jurer de garder le secret absolu et de ne rien révéler aux non-initiés. En se présentant à l'école, chaque postulant doit remettre tous ses biens à la confrérie. Mais si, pour quelque raison que ce soit, il était renvoyé, on lui rendait le double de ce qu'il avait donné : on considérait qu'on lui payait ce qu'il n'avait pas pu saisir en connaissance. On lui creusait également une tombe, signifiant ainsi qu'on le considérait comme mort. Les adeptes doivent s'entraîner au combat et effectuer des exercices physiques. Ils pratiquent aussi des rites secrets, héritage probable des rites égyptiens et babyloniens. Et bien sûr, ils étudient les mathématiques, la philosophie, les sciences physiques et naturelles, ainsi que la musique. Chaque découverte est attribuée à Pythagore, ce qui fait que l'on a du mal à savoir ce que Pythagore a trouvé lui-même.

L'emploi du temps des disciples est rigoureusement réglé : ils se lèvent à l'aube, font une promenade durant laquelle ils doivent exercer leur mémoire. Puis ils suivent une leçon au temple et effectuent des exercices physiques. Le déjeuner est composé de pain et de miel. On règle alors les affaires courantes et politiques. Le soir, au cours d'une seconde promenade, on exerce encore sa mémoire. Puis on se réunit pour un repas, végétarien, par tables de dix. À la fin du repas, le plus jeune d'entre eux lit un poème. Puis prière collective. Avant de s'endormir, il faut encore se livrer à un dernier exercice de mémoire. La confrérie ayant un fonctionnement oral, tous ces exercices mémoriels sont donc particulièrement importants.

La Tétraktys

Les pythagoriciens ne faisaient aucune distinction entre arithmétique, géométrie et physique. Un point géométrique, un grain de matière et l'unité arithmétique étaient envisagés comme un concept unique. Les nombres pouvaient donc se représenter par des agencements de points à partir desquels on pouvait en déduire les propriétés. Ils distinguaient notamment :

- la monade (1) : principe d'identité ;
- la dyade (2) : 1er nombre, pair et féminin ;
- la triade (3) : 1er nombre impair, masculin ;

- la décade (10) : somme des points contenus dans la tétraktys.

Monade Dyade Triade Tétraktys

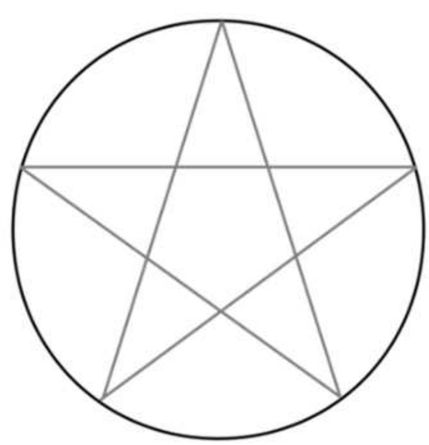
La Tetraktys : « Tetraktys » signifie « au quadruple éclat rayonnant ». C'est un symbole fondamental pour les pythagoriciens. Ils lui ont dédié cette prière :

> « Bénis-nous, nombre divin, toi qui as engendré les dieux et les hommes ! Ô sainte, sainte Tétraktys ! Toi qui contiens la racine et la source du flux éternel de la création ! Car le nombre divin débute par l'unité pure et profonde et atteint ensuite le quatre sacré ; ensuite il engendre la mère de tout, qui relie tout, le premier né, celui qui ne dévie jamais, le Dix sacré, qui détient la clef de toutes choses. »

Le pentagramme : c'est l'emblème des pythagoriciens, leur signe de ralliement.

2 est le premier nombre pair, féminin *et 3 est le premier nombre impair, masculin.*

Et 2 + 3 = 5.

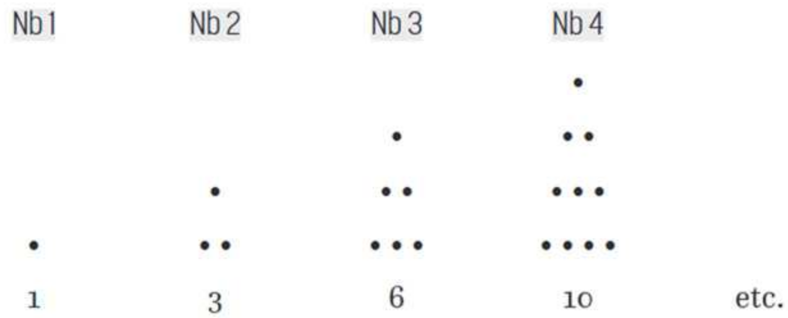


Les découvertes attribuées aux Pythagoriciens

1. Tables d'addition et de multiplication

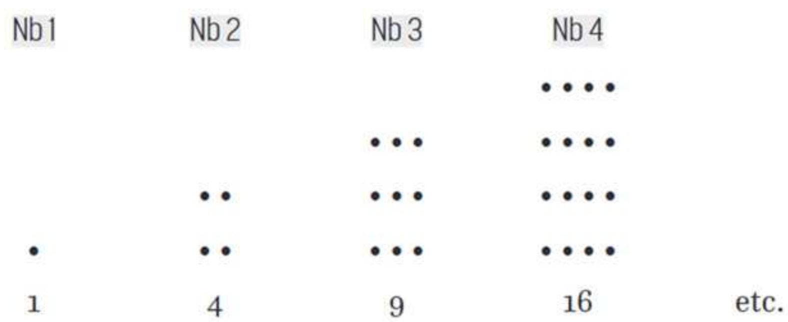
2. Les nombres polygonaux

Les nombres triangulaires



Le n^e nombre triangulaire s'écrit $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Par exemple, le 3^e nombre triangulaire est $\dfrac{3\times(3+1)}{2}=\dfrac{3\times 4}{2}=\dfrac{12}{2}=6$.

Les nombres carrés



Le n^e nombre carré s'écrit n^2.

Par exemple le 3^e nombre carré est $3^2=3\times 3=9$.

Deux nombres sont amicaux (ou amiables, ou amis) si la somme des diviseurs de l'un (autre que lui-même) est égale à l'autre.
Par exemple, 220 et 284 sont amicaux :
Les diviseurs de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 24, 55, 110 (et 220) :
$1+2+4+5+10+11+20+22+24+55+110=284$.
Les diviseurs de 284 sont 1, 2, 4, 71, 142 (et 284) :
$1+2+4+71+142=220$.

3. Les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

La moyenne arithmétique de deux nombres a et b est $\frac{a+b}{2}$.
La moyenne géométrique de deux nombres a et b est $\sqrt{a \times b}$.
La moyenne harmonique de deux nombres a et b est $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

4. La somme des mesures des angles d'un triangle fait 180°.

5. On ne peut faire un pavage régulier qu'avec le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier

6. Les 5 polyèdres réguliers inscrits dans une sphère (dits solides de Platon) :

- le tétraèdre (4 faces),
- le cube (6 faces),
- l'octaèdre (8 faces),
- le dodécaèdre (12 faces),
- l'icosaèdre (20 faces).

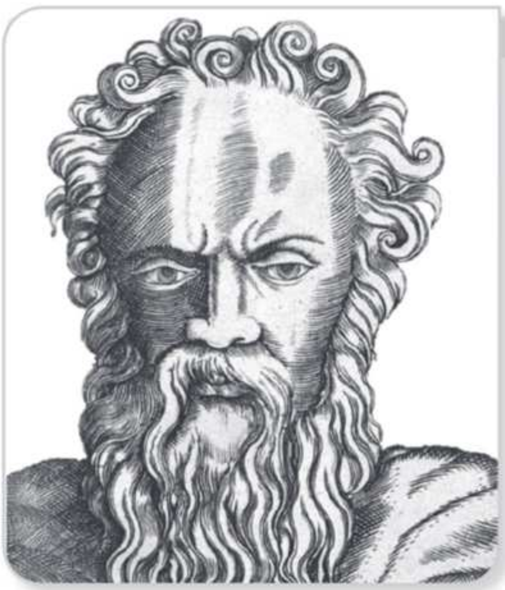
Ce sont les seuls solides réguliers qui existent, contrairement aux polygones réguliers, qui eux, sont en nombre infini. (→ chapitre 7, *Les solides de Platon*)

7. La démonstration par l'absurde, consistant à supposer un résultat vrai alors que l'on sait qu'il est faux. Le raisonnement que l'on suit ensuite amène nécessairement à une absurdité.

8. Pythagore est à l'origine du mot *philosophie* : il se serait qualifié de *philosophos* (ami de la sagesse) par modestie, car il refusait de se dire sage. Il est également à l'origine du mot *mathématique*.

Chapitre 3.

Hippase « l'Acousmaticien »

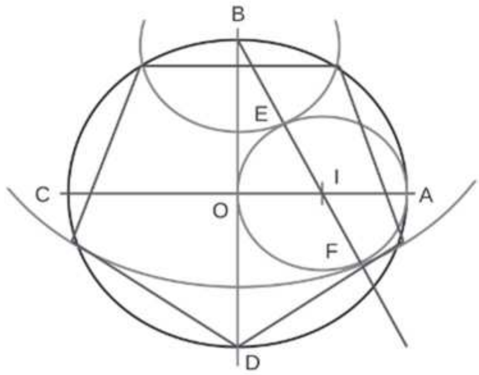


Env. 500 av. J.-C.

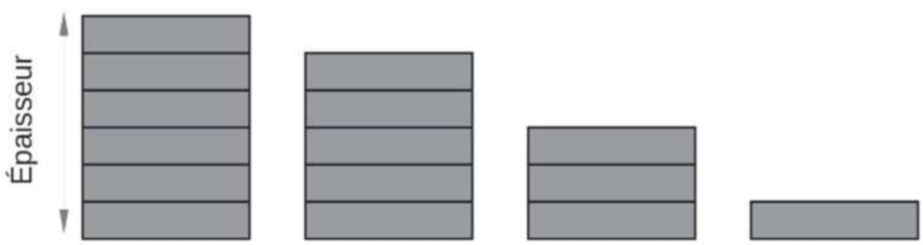
C'est un pythagoricien de la première heure, originaire de Métaponte. Il dirigeait le groupe des acousmaticiens, pendant que Pythagore s'occupait du groupe des mathématiciens. Mais il est surtout célèbre pour avoir dévoilé l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$. Il aurait alors été banni de la communauté et aurait choisi de se noyer en mer.

On lui doit la construction à la règle et au compas du pentagone régulier :

1. tracer un cercle de centre O et de rayon R ;
2. tracer deux diamètres perpendiculaires [AC] et [BD] ;
3. placer le point I milieu de [OA] ;
4. tracer le cercle de centre I passant par A ;
5. tracer la droite (BI). Elle coupe le cercle de diamètre [OA] en deux points E et F ;
6. tracer les cercles de centre B passant par E et F ;
7. ces deux cercles coupent le cercle de départ en quatre points ;
8. le pentagone est constitué de ces quatre points et du point D.



On pense également que c'est lui qui est à l'origine, en musique, de la gamme pythagoricienne. On raconte qu'il aurait fabriqué 4 disques de bronze de hauteurs différentes mais de même diamètre et aurait ainsi obtenu, en percutant les disques :



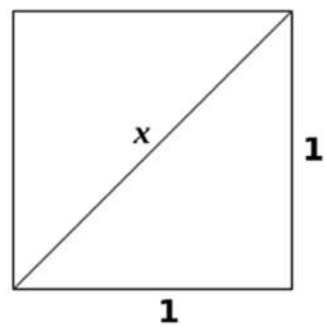
Il existe la même histoire en remplaçant les disques par des vases plus ou moins remplis d'eau. On en parle de façon plus détaillée au chapitre 5, *Les Pythagoriciens et la musique.*

La crise des irrationnels

Pour les pythagoriciens, chaque élément de la nature peut être représenté par un nombre. Il faut bien sûr se rappeler qu'à l'époque, on entend par nombre les nombres entiers et les rapports de nombres entiers.

Prenons un carré de côté 1. On peut naturellement se demander quelle sera la longueur de la diagonale.

C'est précisément le théorème de Pythagore qui en donne la réponse :



$x^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$

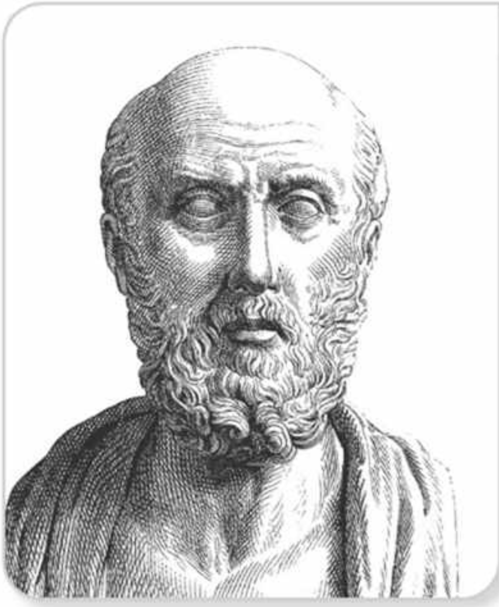
La diagonale a donc pour longueur un nombre dont le carré vaut 2. Quel est ce nombre ? Les pythagoriciens ont eu beau le chercher, ils ne le trouvèrent pas. Et si aucun nombre n'existe, comment s'en assurer ?

La seule façon d'affirmer qu'une chose n'existe pas, c'est de prouver qu'elle ne peut pas exister. C'est ce qu'ont fait les pythagoriciens, avec la première démonstration par l'absurde de l'Histoire. Cette diagonale, qui existe bien réellement, que l'on devait pouvoir mesurer simplement, ne correspond à aucun nombre (au sens pythagoricien). Cette malencontreuse trouvaille jeta un trouble dans la théorie des disciples de Pythagore, qui pensaient que l'on pouvait tout chiffrer à l'aide de nombres entiers ou de fractions de nombres entiers. Hippase de Métaponte, grand responsable des acousmaticiens, a pourtant divulgué la découverte et trahi ainsi la confrérie. L'incommensurabilité de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire le fait que la diagonale n'a pas de commune mesure avec le côté du carré, lui a été fatale, puisqu'il s'est noyé peu de temps après. Par la suite, au XIXe siècle, les nombres irrationnels, c'est-à-dire qui ne peuvent être écrits sous la forme d'une fraction, ont trouvé leur place dans le monde mathématique.

Ironie du sort : le théorème de Pythagore n'est pas de Pythagore. Bien avant lui, les Égyptiens et les Babyloniens avaient découvert ce fameux théorème. En revanche, on attribue à Pythagore le mérite de l'avoir démontré. Il aurait, dit-on, sacrifié un bœuf en l'honneur des Muses à l'occasion de cette découverte, ce qui est peu vraisemblable toutefois, puisqu'on sait que Pythagore, végétarien, n'aurait certainement pas sacrifié un animal. Et puis, il y a ceux qui attribuent cette démonstration à Euclide... En tout cas, on a donné le nom de Pythagore au théorème qui est à l'origine de la chute de la confrérie des pythagoriciens.

Chapitre 4.

Hippocrate « le Quadrateur »



470-410 av. J.-C.

Hippocrate est né à Chios. Il ne faut pas le confondre avec un autre Hippocrate, originaire de Cos et qui est le médecin à l'origine du fameux serment. Notre Hippocrate à nous est commerçant. C'était un des plus grands géomètres de l'époque, mais en dehors de cela, il était un peu trop naïf. Il se fait voler ses marchandises, lors d'un voyage en mer, par des pirates. Ruiné, il se tourne vers la géométrie et suit des cours de mathématiques, auprès des pythagoriciens. Il serait à l'origine de la démonstration par l'absurde, qui consiste à établir qu'une proposition est vraie en prouvant que la proposition contraire conduit à une absurdité. Par exemple, un nombre qui serait à la fois pair et impair ou deux droites parallèles qui sont sécantes. Mais il sera renvoyé de la confrérie : il aurait divulgué de la géométrie, en échange d'argent, à des personnes extérieures à la confrérie.

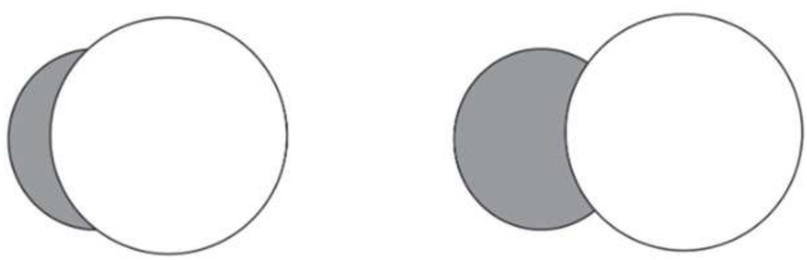
Il aurait compilé, bien avant Euclide, des éléments, que l'on retrouve dans les livres III et IV des *Éléments.* (→ chapitre 11, *Les Éléments*)

En particulier, il s'intéresse aux lunules, dans le but de résoudre la quadrature du cercle.

La quadrature du cercle

C'est une des grandes questions des mathématiciens de l'antiquité : construire uniquement à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné. Hippocrate essaye de résoudre ce problème en étudiant les lunules. Ce sont des figures en forme de croissant, composées de deux arcs de cercles convexes. Il pensait qu'en réalisant des lunules suffisamment petites, il pourrait « entourer » le cercle et ainsi réaliser la quadrature du cercle.

Exemples de lunules



Notons que deux autres problèmes ont fait plancher les mathématiciens de l'antiquité :

- **La duplication du cube** : construire à la règle et au compas un cube ayant un volume double de celui d'un cube donné. Il faut réussir à tracer un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$.
- **La trisection de l'angle** : construire à la règle et au compas les demi-droites divisant en trois angles égaux un angle quelconque.

Il a été prouvé, au XIXe siècle, que ces problèmes n'avaient pas de solution.

Les lunules d'Hippocrate

Remarque préalable

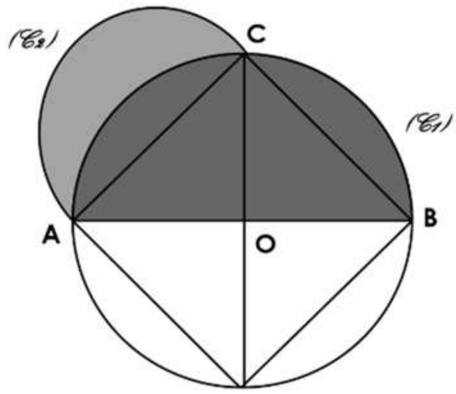
Les aires a_1 et a_2 de 2 cercles sont dans le même rapport que les carrés de leurs diamètres d_1 et d_2 (r_1 et r_2 étant les rayons des deux cercles) :

$$a_1 = \pi \times r_1^2 = \pi \times \left(\frac{d_1}{2^2}\right)^2 = \pi \times \frac{d_1^2}{4}$$

et $a_2 = \pi \times r_2^2 = \pi \times \left(\frac{d_2}{2^2}\right)^2 = \pi \times \frac{d_2^2}{4}$

donc $\frac{a_1}{a_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$.

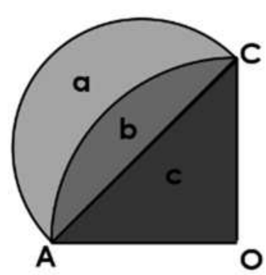
Lunule dans un carré



D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 2\,AC^2$, soit $\frac{AB^2}{AC^2} = 2$.
Soit $\mathscr{C}_1$ le demi-cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}_2$ le demi-cercle de diamètre [AC].
Donc, d'après la remarque préalable : $\frac{\text{Aire}(C\ \ )}{\text{Aire}(C\ \ )} = 2$.
Donc Aire ($\mathscr{C}_1$) = 2 × Aire ($\mathscr{C}_2$).

Par suite, Aire (quart de cercle de diamètre [AB]) = Aire ($\mathscr{C}_2$).

En reprenant la partie de la figure qui nous intéresse, on obtient :



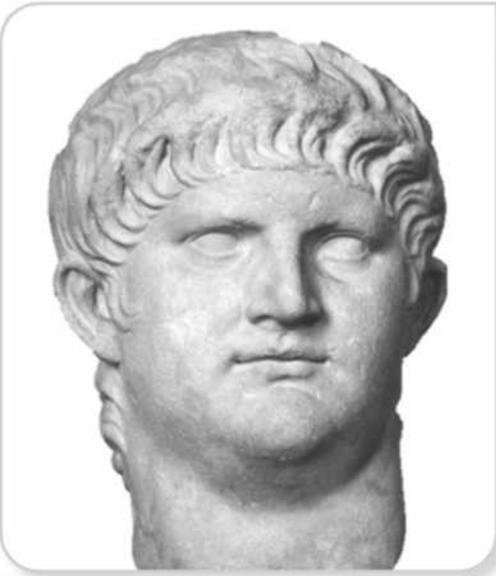
a + b = b + c, donc a = c.

C'est-à-dire aire de la lunule **(a)** = aire du triangle AOC.
Donc on a réalisé la quadrature de la lunule.

Hippocrate a réalisé des quadratures d'autres lunules, par exemple en utilisant un hexagone à la place du carré, pour tenter de réaliser une figure polygonale dont les contours se rapprocheraient au mieux des contours du cercle et donc de réaliser un carré dont l'aire se rapprocherait au mieux de l'aire du cercle. Le souci, c'est que le résultat qu'il a obtenu n'est pas généralisable à toutes les lunules et donc il échoue dans la résolution de la quadrature du cercle. De fait, on sait maintenant que ce problème n'est pas résoluble, puisqu'il faudrait réussir à tracer un segment de longueur $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas.

Chapitre 5.

Philolaos « l'Astronome »



470-385 av. J.-C.

Philolaos est un pythagoricien. Originaire de Crotone, il serait ensuite parti à Thèbes. Là, il y aurait rencontré Platon. Celui-ci, intéressé par ses idées, s'en serait inspiré pour rédiger le *Timée*, un de ses dialogues.

Pythagore est l'un des premiers à affirmer que la Terre est sphérique. Thalès, lui, pensait que la Terre était plate et qu'elle flottait sur un océan d'eau. On ne sait pas comment Pythagore a eu cette idée, il est possible qu'il l'ait eue en observant l'ombre de la Terre sur la Lune, mais il est tout aussi envisageable qu'il ait voulu faire de la Terre un objet sphérique, simplement parce que le solide le plus beau et le plus parfait selon lui est la sphère. Du coup, il a considéré les autres astres sphériques aussi. De plus, il aurait été le premier à comprendre que l'étoile du soir (l'étoile du berger), est la planète Vénus.

Mais pour Philolaos, le système astronomique n'est ni géocentrique, ni héliocentrique : au centre de l'univers, il y a un feu central, Hestia, qui anime le cosmos. Autour de ce feu tournent neuf astres, dont la Terre et l'anti-Terre. L'hémisphère habité de la Terre tourne toujours le dos à l'anti-Terre, ce qui fait que les terriens ne la voient jamais. Cette anti-Terre permettait d'expliquer les éclipses de lune, qui sont beaucoup plus fréquentes que les éclipses de soleil. Mais une autre hypothèse est qu'en tant que Pythagoricien, Philolaos aurait voulu respecter la Tétraktys. (→ chapitre 2, *La tétraktys*)

Il fallait donc un dixième corps céleste, qui ne serait pas observable de la Terre, ou du moins de la Terre « habitée. »

Le tout est placé dans une « sphère des étoiles », entourée par un feu extérieur, le tout baignant dans l'« *apeiron* » : un vide indéterminé, le chaos primitif, mouvant, instable, indéfini. Le soleil est une boule de cristal qui réfléchit la lumière du feu central. La terre tourne autour du feu central en 24 h. La Lune est semblable à la Terre : elle est peuplée d'animaux mythiques, plus grands et plus beaux que ceux de la Terre. Il faut noter que Philolaos est le premier astronome à envisager que la terre n'est pas au centre de l'univers.

1	Feu central	6	Vénus
2	Anti-Terre	7	Mercure
3	Terre	8	Mars
4	Lune	9	Jupiter
5	Soleil	10	Saturne

Outre ses travaux sur l'astronomie, Philolaos a également poursuivi le travail d'Hippase en musique (qui sera détaillé page suivante) et a travaillé sur l'association des grandeurs à un nombre. Il aurait dit : « Tout est connaissable par le nombre et rien ne peut être connu sans lui. » Il associe les grandeurs à un nombre :

- 1 = point
- 2 = droite
- 3 = plan
- 4 = espace
- 5 = couleurs/qualités
- 6 = âme
- 7 = esprit/santé
- 8 = amour/amitié

C'est en soi un bon résumé de la philosophie pythagoricienne !

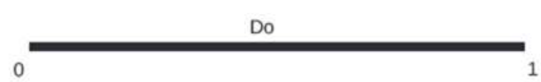
Les pythagoriciens et la musique

Pour les pythagoriciens, les nombres sont partout. Et tout commença avec la musique : le nombre était relié à elle, deux sons joués ensemble donnant une impression harmonieuse pouvait s'expliquer mathématiquement.

Les pythagoriciens se sont consacrés aux sonorités des instruments à cordes. Ils découvrent qu'il existe une relation entre la longueur d'une corde tendue que l'on fait vibrer et la hauteur du son émis. Plus la corde est petite, plus le son est aigu. Ils créent alors un instrument, le monocorde : une simple corde tendue au-dessus d'une caisse de résonance. Grâce à ce monocorde, ils vont créer la base de ce qui s'appellera plus tard la gamme pythagoricienne.

Un son est une vibration de l'air qui vient exciter notre tympan. Une vibration se définit par son amplitude (le son est-il fort ou faible ?) et sa fréquence, (le nombre de vibrations par seconde), que nous allons approfondir ici. Des fréquences élevées vont produire des sons aigus et des fréquences faibles, des sons graves. La fréquence se mesure en hertz (Hz). Sur la corde d'une guitare, d'un luth, d'un violon (ou d'un monocorde), plus la corde est courte, plus la fréquence est élevée (la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur de la corde). Si l'on prend deux sons de fréquences différentes, on peut définir les rapports des fréquences entre les deux et les simplifier : plus la fraction sera simple, plus les deux sons seront harmonieux entre eux.

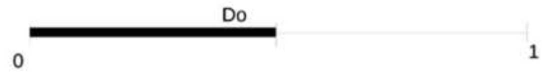
Prenons quatre cordes tendues. Pour l'exemple, on suppose que la première corde est un Do.



La deuxième a une longueur représentant les 3/4 de la première. La corde est plus courte, on entend donc un son plus aigu : c'est la **quarte** du Do, à savoir le Fa.

La troisième corde a une longueur représentant les 2/3 de la première. C'est la **quinte** du Do : le Sol.

Enfin, la dernière corde fait la moitié de la première. C'est le Do à l'**octave** supérieur, que l'on nommera Do aigu ici.



On remarquera que les nombres utilisés ici sont les nombres de la Tétraktys (1, 2, 3 et 4). (→ chapitre 2, *La Tétraktys*)

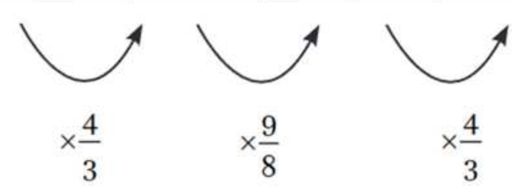
À l'époque des pythagoriciens, sept astres étaient connus, à savoir Lune, Soleil, Vénus, Mercure, Mars, Jupiter et Saturne. Ils ont donc défini les sept notes que nous connaissons de nos jours et qui correspondent à ces sept astres. En effet, selon eux, les astres se déplacent en émettant des sons, en fonction de leur distance par rapport à la Terre. Tous ces sons composaient l'*harmonie des sphères.*
Rappelons que deux grandeurs sont dites inversement proportionnelles si leurs mesures évoluent dans des sens contraires, c'est-à-dire si le produit de leurs grandeurs est un nombre constant.

Ici, $\text{fréquence} = \dfrac{1}{\text{longueur de corde}}$.

Fa est la quarte de Do (→ figure page précédente), donc l'intervalle de fréquence (qui se calcule par division) est de $\dfrac{\text{Fa}}{\text{Do}} = \dfrac{4}{3} \div 1 = \dfrac{4}{3}$.

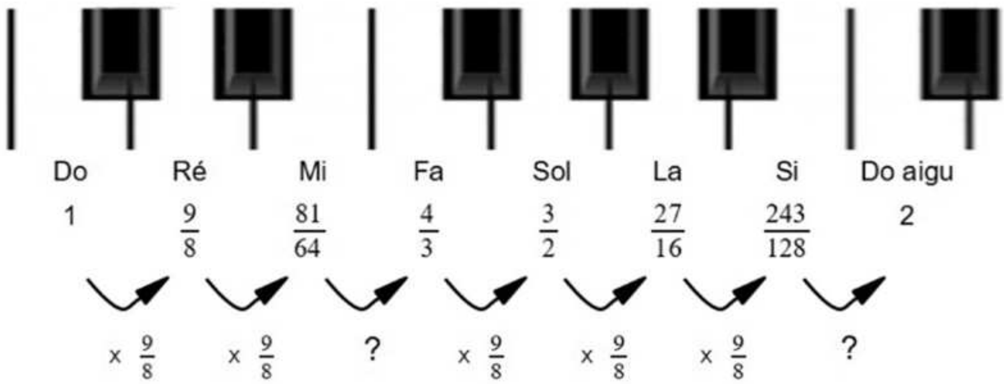
C'est le même intervalle qui sépare le Sol du Do aigu, c'est-à-dire le Do une octave plus haut : $\dfrac{\text{Do aigu}}{\text{Sol}} = 2 \div \dfrac{3}{2} = 2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

	Do	Fa	Sol	Do aigu
Longueur de la corde	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
Fréquence	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2



Entre Fa et Sol, l'intervalle est de $\dfrac{\text{Sol}}{\text{FA}} = \dfrac{3}{2} : \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{8}$.

Entre Do et Fa, on ajoute les deux notes Ré et Mi, de telle sorte que l'intervalle soit à chaque fois de $\frac{9}{8}$ et, de la même manière, on ajoute les notes La et Si entre Sol et Do aigu. On obtient alors les sept notes :



Le problème, c'est que l'intervalle de $\frac{9}{8}$ « mange » un petit peu trop les intervalles de Do à Mi et de Sol à Si, ce qui fait qu'il ne reste plus que $\frac{\text{Fa}}{\text{Mi}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{81}{64}}=\frac{4}{3}\times\frac{64}{81}=\frac{256}{243}=\frac{\text{Do aigu}}{\text{Si}}$ pour les intervalles de Mi à Fa et de Si à Do aigu.

On nomme l'intervalle de $\frac{9}{8}$ (= 1,125) le « ton » et l'intervalle de $\frac{256}{243}$ (≈ 1,053) le « demi-ton », qui n'est pas exactement la moitié d'un ton. Il est un tout petit peu plus petit qu'un ton, c'est ce que l'on nomme en musique occidentale le « demi-ton diatonique ». Il sépare deux notes de noms différents, comme « Mi-Fa » et « Si-Do ». Le préfixe « dia », comme dans « division », signifie « séparation ».

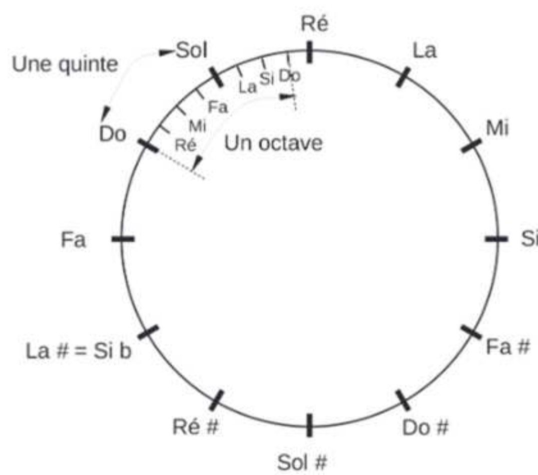
Le « reste » est un autre « demi-ton », $\frac{9}{8}:\frac{256}{243}=\frac{9}{8}\times\frac{243}{256}=\frac{2187}{2048}$(» 1,068), c'est le complément de $\frac{256}{243}$ pour arriver au ton. Il sépare des notes de même nom (Fa et Fa#, Si et Sib), Il est nommé « chromatique », de « chroma » en grec qui signifie « couleur », parce qu'il change la « couleur » de la note.

Le cycle des quintes

Le système pythagoricien est issu du « cycle des quintes ». Il s'appuie sur deux faits :

- que l'on « assimile » entre elles les notes espacées d'octaves (tous les « Do », tous les « Ré »...) ;
- que toutes les notes peuvent être définies comme la « quinte d'une quinte d'une quinte... ». Si l'on prend la quinte du Sol, on obtient un Ré. Il en est de même pour chaque note de la gamme.

Voici ce « cycle des quintes » :



On remarque qu'à la douzième quinte, on tombe sur une note très proche de la note prise au départ. On tombe en fait presque sur la même note, mais sept octaves au-dessus.

En pratique, quand on monte de sept octaves (c'est-à-dire que l'on coupe sept fois une corde en deux), cela fait : $2^7 = 128$ (la corde est 128 fois plus petite qu'au départ). On compare ensuite cette valeur à celle que l'on obtient lorsque l'on monte de douze quintes, soit : $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}75$.

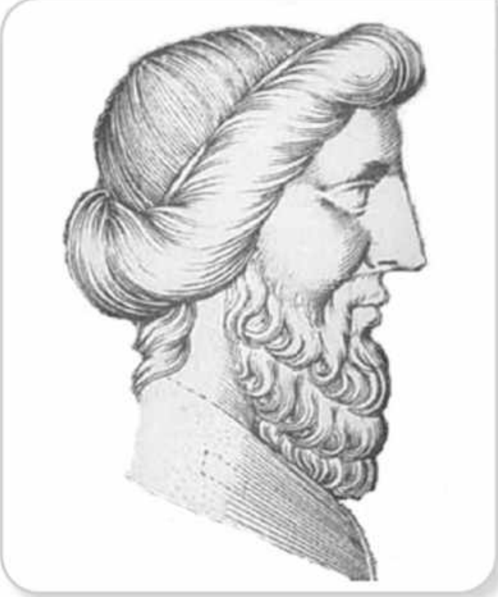
Ce sont deux valeurs très proches, mais pas tout à fait égales. L'écart entre ces deux valeurs est appelé *comma pythagoricien*.

Sa valeur exacte est : $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \dfrac{3^{12}}{2^{19}} = \dfrac{531441}{524288}$.

Cette douzième quinte, raccourcie pour correspondre aux sept octaves du fait du *comma pythagoricien*, porte le nom de quinte du loup, car elle est très dissonante (elle « hurle »).

Chapitre 6.

Archytas « l'Ingénieux »



Env. 430-360 av. J.-C.

Archytas est l'un des derniers pythagoriciens. C'est un poète, un philosophe et un homme d'état : il fut stratège de Tarente, c'est-à-dire qu'il était un magistrat chargé des questions militaires. Il occupa ce poste durant sept ans, ce qui est remarquable, car en principe on ne pouvait avoir ce rôle qu'un an. Cette fonction lui fut d'ailleurs fort utile, lorsque son ami Platon eut des ennuis avec Denys, Tyran de Syracuse. Celui-ci le retenait prisonnier et Platon risquait fort d'y laisser la vie. Archytas, ayant été averti de la situation, dépêcha à Syracuse un messager, escorté de soldats. Archytas exigeait qu'il laisse repartir Platon. Impressionné par l'armée qui accompagnait le messager et craignant une guerre avec Tarente, Denys céda et Platon put quitter Syracuse sans problème.

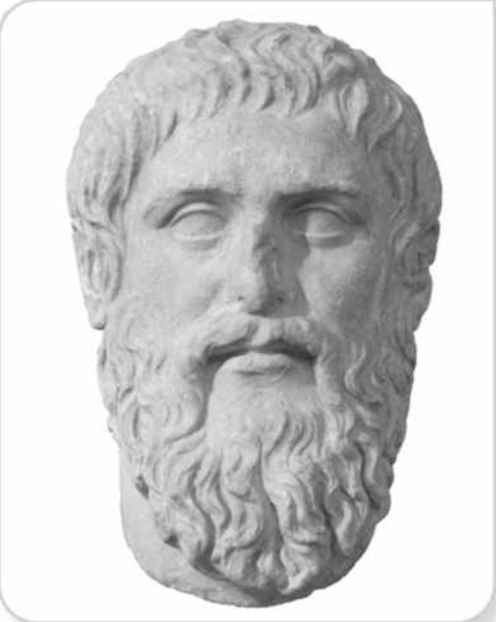
Archytas est considéré comme le premier ingénieur : il applique les principes mathématiques à des problèmes concrets et crée des automates. On lui doit la fabrication d'un oiseau en bois qui peut voler, la création d'une crécelle pour amuser (et occuper) les enfants et même l'élaboration d'un cerf-volant. Il a, tout comme Hippase et Philolaos, contribué à l'amélioration de la gamme pythagoricienne, en musique, par l'étude des moyennes harmoniques.

Très étonnamment, il est également considéré comme étant l'inventeur du nombre « 1 ». Bien sûr, les hommes savent compter depuis très longtemps et utilisent un symbole pour désigner le chiffre 1. Mais ce qu'il faut comprendre, c'est que jusque-là, le nombre 1 n'avait pas de raison d'exister : on ne commence à compter qu'à partir de deux éléments. Quand il n'y en a qu'un, on constate sa présence, on ne le compte pas. 1 existait en tant que chiffre, mais pas en tant que nombre. Archytas en a fait un nombre comme les autres : c'est peut-être un détail pour vous, mais pour lui ça veut dire beaucoup !

Archytas serait peut-être également le premier tagueur de l'Histoire : il avait décidé que jamais il ne prononcerait de grossièreté. Un jour, très énervé par ses interlocuteurs, il aurait foncé vers un mur et écrit en lettres majuscules les mots qu'il refusait de prononcer.

Chapitre 7.

Platon « le Dilettante »



428-348 av. J.-C.

Platon naît à Athènes en –428 et mourra en –348. Issu d'une famille aristocratique, il reçoit une éducation poussée : il étudie les arts, la littérature, l'arithmétique, puis la géométrie et l'astronomie. Il effectue également des exercices physiques. D'ailleurs, Platon n'est pas son véritable nom, il s'appelle en fait Aristoclès. C'est son professeur de gymnastique qui l'a surnommé *Platon : cela* signifie « le large », en référence à sa forte musculature. Vers 20 ans, il rencontre Socrate et suit son enseignement. Mais en –403, Socrate est accusé d'impiété et de corruption de la jeunesse : il est condamné à mort.

En –388, Platon entreprend un voyage qui le mène dans un premier temps à Alexandrie, puis dans un second temps à Cyrène. Il suivra les leçons du pythagoricien Théodore de Cyrène (–465/–398), dont il parlera dans *Le Théétète*. Il part ensuite pour Tarente, où il se lie d'amitié avec Archytas (→ chapitre 6). Lorsqu'il retourne à Athènes, en –387, il fonde son école, dans un ancien gymnase, appelé « Académie ». C'est un immense succès. Il aura, entre autres, Aristote pour élève. L'école survivra à Platon : elle ne sera dissoute qu'en 529, par l'empereur Justinien, qui voulait détruire ce lieu d'enseignement des idées païennes.

Suite à la fondation de son école, il fera encore des voyages, à Syracuse notamment. Mais cela ne se passe pas très bien : il a du mal à faire valoir ses considérations politiques face à Denis l'ancien, Tyran, dans un premier temps, puis face à Denis le jeune, fils du précédent et tyran également. Au cours de sa troisième visite, en –366, Denis le jeune le séquestre. Platon craint pour sa vie, mais il parvient à envoyer une lettre à Archytas, qui enverra un navire à son secours. De retour à Athènes, il reprend son enseignement et ses écrits.

Platon est avant tout un philosophe. Mais il a une grande culture mathématique, par son éducation, puis par l'enseignement qu'il a reçu de Théodore et par ses relations avec Archytas. Il porte un grand intérêt aux mathématiques, en témoigne l'inscription sur le fronton de l'Académie :

> *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.*

Il introduit la notion d'idée, dans *Le Ménon*. L'idée d'un objet est sa représentation parfaite, immuable, en opposition à l'objet matériel, imparfait, changeant. En géométrie, cela s'applique aux dessins, imparfaits, en comparaison avec leur représentation idéale. Les idées sont antérieures à toute connaissance sensible : la diagonale d'un carré de côté 1 (à savoir $\sqrt{2}$) existe depuis toujours, n'en déplaise aux pythagoriciens ! (→ chapitre 3, *La crise des irrationnels* et chapitre 8, *L'irrationalité de* $\sqrt{2}$)

En fait, les mathématiciens raisonnent à partir des objets idéaux, les dessins n'en étant que des représentations imparfaites. Cela nécessite donc de donner des définitions claires de ces objets idéaux. De plus, le raisonnement sur les idées impose aux mathématiciens le raisonnement déductif : les dessins ne constituent plus une preuve.

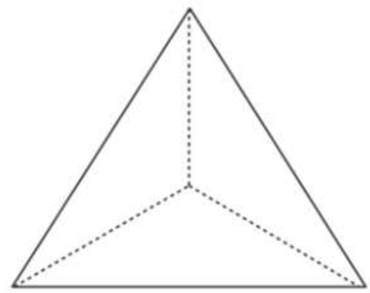
Les solides de Platon

Les polygones réguliers, c'est-à-dire les figures planes dont les côtés sont tous de la même longueur et qui sont inscrits dans un cercle sont en nombre infini : il y a le triangle équilatéral (3 côtés), le carré (4 côtés), le pentagone régulier (5 côtés) et ainsi de suite. Cependant, dans l'espace, il n'y a que cinq solides réguliers, pas plus, pas moins. On les appelle les solides platoniciens. Platon en parle dans *Le Timée*, mais la description qu'il en fait est succincte. Il a associé les éléments à chacun d'eux et réservant l'univers pour le dodécaèdre. Par la suite, le dodécaèdre sera associé à un cinquième élément, l'éther.

Pour Platon, l'élément de base est un triangle rectangle dont la longueur de l'hypoténuse vaut deux fois la longueur du plus petit côté.

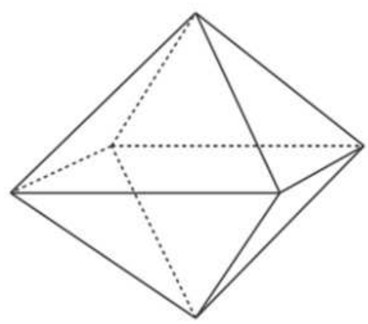
En groupant deux de ces triangles, on obtient un triangle équilatéral.

Si on groupe 3 triangles équilatéraux autour de chaque sommet, on obtient un tétraèdre régulier (le tétraèdre a 3 faces triangulaires):



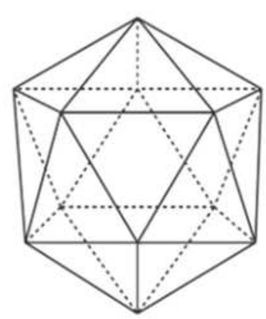
Tétraèdre = Feu

Si on groupe 4 triangles équilatéraux autour de chaque sommet on obtient un octaèdre régulier (l'octaèdre a 8 faces triangulaires):



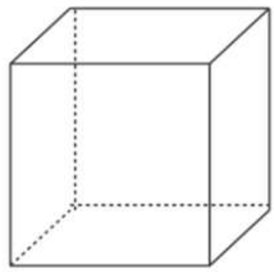
Octaèdre = Air

Si on groupe 5 triangles équilatéraux autour de chaque sommet on obtient un icosaèdre régulier (l'icosaèdre a 20 faces triangulaires):



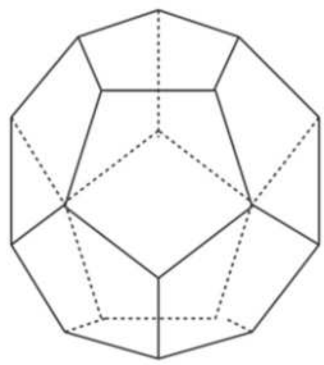
Icosaèdre = Eau

Pour le cube, on construit un carré en assemblant 2 triangles isocèles pour obtenir un carré (l'hexaèdre a 6 faces carrées, soit donc 12 triangles) :



Hexaèdre = Cube = Terre

En revanche, Platon ne dit rien du dodécaèdre.



Dodécaèdre = Univers

Formule de Descartes (1596-1650) – Euler (1707-1783)

Dans un polyèdre convexe, on a $F + S = A + 2$, où F = nombre de faces ; S = nombre de sommets ; A = nombre d'arêtes.

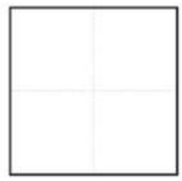
On peut s'assurer que les solides de Platon vérifient cette formule :

	Faces	Sommets	Arêtes	
Tétraèdre	4	4	6	$4 + 4 = 6 + 2$
Hexaèdre	6	8	12	$6 + 8 = 12 + 2$
Octaèdre	8	6	12	$8 + 6 = 12 + 2$
Icosaèdre	20	12	30	$20 + 12 = 30 + 2$
Dodécaèdre	12	20	30	$12 + 20 = 30 + 2$

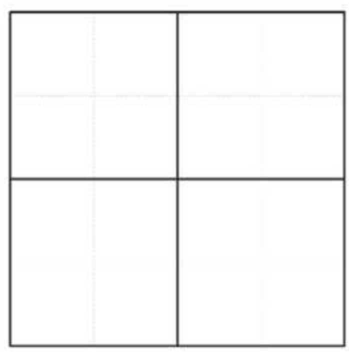
La duplication du carré

Dans *Le Ménon*, Platon décrit un dialogue entre Socrate et l'esclave de Ménon.

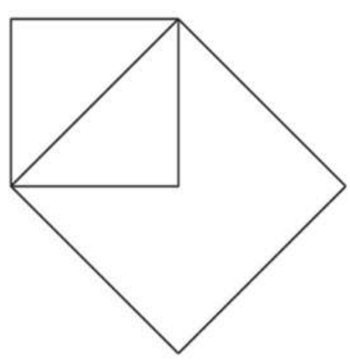
Socrate montre un carré sur le sol :



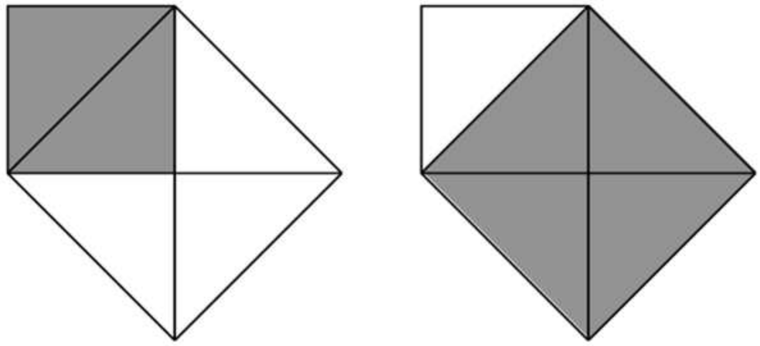
Il demande à l'esclave quelle est l'aire de ce carré, celui-ci lui répond quatre. Socrate lui demande ensuite quelle serait l'aire du carré si on doublait son côté. L'esclave lui répond huit. Mais Socrate s'applique à lui faire découvrir qu'en doublant le côté du carré, l'aire est multipliée par quatre et non par deux :



Il montre ensuite à l'esclave comment construire un carré de surface double :



En montrant cette figure, l'esclave voit que cette fois-ci, l'aire du grand carré est bien le double de l'aire du carré initial :



On notera que si le côté du carré de départ a une longueur de 1, alors le côté du grand carré a une longueur de $\sqrt{2}$. (→ chapitre 3, *La crise des irrationnels*)

Chapitre 8.

Théétète « le Précoce »

415-395 av. J.-C.

Théétète est mathématicien et philosophe. C'est un disciple de Socrate, tout comme Platon qui parle de lui dans deux de ses dialogues, Le Sophiste et surtout Le Théétète (cela va de soi). Il a également été le disciple du pythagoricien Théodore de Cyrène. Lors de la guerre de Corinthe de –395, il est blessé au combat et meurt peu après de dysenterie, à l'âge de vingt ans.

C'est visiblement un génie : dans Le Théétète, Platon fait dire à Socrate :

> « Théodore, qui a tant loué devant moi d'étrangers et d'Athéniens, n'a encore fait de personne l'éloge qu'il vient de faire de toi. »

Et Théodore dit encore que Théétète apprend « avec une facilité dont on trouverait à peine un autre exemple » et parle de « cette acuité, cette vivacité d'esprit, cette mémoire ».

Il décrit les cinq polyèdres dits de Platon et montre leur existence. C'est le livre XIII des *Éléments* d'Euclide.

Son maître Théodore avait réussi à démontrer, en utilisant des figures géométriques, l'irrationalité de $\sqrt{n}$, pour tous les entiers de 2 à 17 (excepté 4, 9 et 16, bien sûr). Il poursuit son travail en travaillant sur tous les irrationnels, en donnant même une définition. On retrouve tout son travail dans le livre X des *Éléments* d'Euclide. Ce livre est de loin le plus compliqué et constitue à lui seul le quart des *Éléments*. Il est longtemps resté obscur aux mathématiciens, tant et si bien que l'on a cru qu'il était impossible qu'il fût écrit par un homme de moins de vingt ans.

Toujours dans Le Théétète, Platon écrit :

> « Il deviendrait célèbre s'il parvenait à l'âge d'homme. »

L'histoire de Théétète fait inévitablement penser à deux grands mathématiciens du XIX[e] siècle, dont le destin n'a pas été plus heureux :

Évariste Galois (1811-1832)

Il propose un mémoire sur « les conditions de résolubilité des équations par radicaux » qui ne sera compris que bien plus tard, après sa mort. L'apport de Galois aux mathématiques est énorme : il influencera notablement les mathématiques du XX[e] siècle. Il meurt à l'âge de 21 ans, lors d'un duel.

Niels Enrik Abel (1802-1829)

Sur son carnet scolaire, son professeur écrit :

> « Au génie le plus extraordinaire, il allie une ardeur inextinguible et un intérêt pour les mathématiques qui feront de lui certainement, s'il vit, un grand mathématicien ».

Il meurt à 27 ans, de tuberculose.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

L'Algorithme suivant est dit algorithme d'Euclide, mais il a sûrement déjà été utilisé par Théétète ou Théodore.

En partant d'un couple de nombres distincts et non nuls, former un nouveau couple de nombres, en remplaçant le plus grand par la différence entre les deux nombres et en conservant le plus petit :

soient a et b deux nombres non nuls tels que $a > b$

$$(a\,;b) \to (b\,;a-b).$$

- Si a et b sont des nombres entiers, on peut répéter l'opération jusqu'à obtenir deux nombres égaux. En effet, dans le couple de nombres obtenu à une étape, le plus grand nombre est remplacé par un plus petit.

Exemple : $(14\,;9) \to (9\,;5) \to (5\,;4) \to (4\,;1) \to (1\,;3) \to (1\,;2) \to (1\,;1)$.

Si les nombres sont commensurables, c'est-à-dire rationnels, l'algorithme se termine aussi : en écrivant les deux nombres avec le même dénominateur, cela revient à faire les différences des numérateurs.

Exemple : $\left(\frac{5}{3};\frac{1}{2}\right)\to\left(\frac{10}{6};\frac{3}{6}\right)\to\left(\frac{3}{6};\frac{7}{6}\right)\to\left(\frac{3}{6};\frac{4}{6}\right)$

$$\to\left(\frac{3}{6};\frac{1}{6}\right)\to\left(\frac{1}{6};\frac{2}{6}\right)\to\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$$

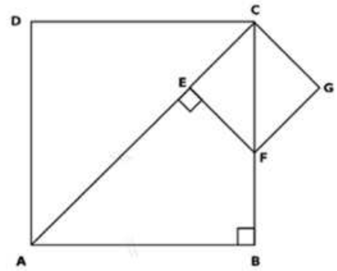
Cependant, si les deux nombres sont incommensurables, alors l'algorithme ne se termine pas.

Avant d'aller plus loin, définissons la commensurabilité de deux nombres :
si a et b sont commensurables de commune mesure u, où u est un nombre entier, alors il existe deux nombres m et n entiers tels que
$a = m \times u$ et $b = n \times u$.
Cela revient à dire, en langage moderne, que $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

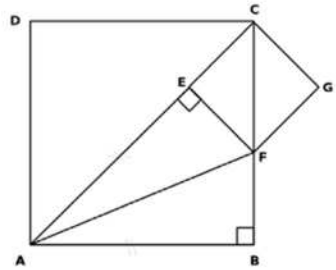
Détricotons l'algorithme en partant de la fin : on a donc obtenu (a ; a). Ce qui signifie qu'à l'étape précédente, on avait (2a ; a) : c'est un couple de nombres commensurables, de commune mesure a.

Supposons que l'on ait obtenu à une étape (a ; b) avec a et b commensurables.
À l'étape précédente, on aurait soit (a + b ; b), soit (a ; a + b).
Si a et b sont commensurables, alors $a = m \times u$ et $b = n \times u$.
Et $a + b = m \times u + n \times u = (m + n) \times u$ qui est commensurable avec a et b.
Donc si un couple de nombres est commensurable, alors le couple qui le précède aussi. En poursuivant le raisonnement, on obtient que le couple de départ est composé de deux nombres commensurables.
Et donc, si au départ le couple est formé de deux nombres incommensurables, alors l'algorithme ne peut pas se terminer.

On applique cet algorithme pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$: dans un carré, le côté et la diagonale n'ont pas de commune mesure.
Soit ABCD un carré. Appliquons l'algorithme d'Euclide à AC et AB.
Pour cela, définissons un point E tel que $E \in [AC]$ et AE = AB.
Soit F le milieu de [BC] et G le symétrique de E par rapport à la droite (BC).
EFGC est donc un parallélogramme.



De plus, $\widehat{ECF} = 45° = \widehat{FCG}$ donc $\widehat{ECG} = 90°$.
Donc EFGC est un rectangle.
En outre, CE = CG donc EFCG est un carré.



On peut également voir que AEF est rectangle en E et que ABF est rectangle en B.
AEF et ABF ont le côté [AF] en commun et AB = AE.
Les deux triangles sont donc semblables et donc EF = FB.

Passons à l'algorithme d'Euclide :
(AC ; AB) → (AC – AB ; AB) or AC – AB =AC – AE = EC.
→ (EC ; AB).
→ (AB – EC ; EC) or AB – EC = BC – EF = BC – FB = CF.
Donc (AC ; AB) → (CF ; EC).

Mais (CF ; EC) est un couple formé par un côté et une diagonale d'un carré, à savoir EFCG.CF est la diagonale de EFGC, comme AC l'était pour ABCD. De même, EC est le côté du carré CEFG comme AB l'était pour le carré ABCD. Donc on se retrouve, après deux étapes de l'algorithme, dans la même situation, qui se réitérera sans jamais s'arrêter. Donc le côté d'un carré et sa diagonale n'ont pas de commune mesure. Or on sait que si le côté du carré a pour longueur 1, alors sa diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$, donc par suite $\sqrt{2}$ est incommensurable, c'est-à-dire irrationnel. On verra une autre démonstration de l'irrationalité de √2 au chapitre 34.

Chapitre 9.

Eudoxe « Le Touche à tout »

Env. 408-355 av. J.-C.

Originaire de Cnide, Eudoxe est à la fois mathématicien, médecin, géographe, astronome et philosophe. Il commence par étudier la médecine, puis se tourne vers les mathématiques : il sera un disciple d'Archytas (→ chapitre 6). À vingt-trois ans, il part pour Athènes, où il se lie d'amitié avec Platon (→ chapitre 7). Il y apprendra la philosophie et la rhétorique (art de l'action des discours sur les esprits). Puis il part pour l'Égypte, où, durant deux ans, il s'initiera à l'astronomie. Il acquiert une très bonne réputation et fonde une école, à Cnide.

Son œuvre est la plus universelle que l'on puisse trouver. En mathématiques, on lui attribue une partie du livre V et le livre XII des *Eléments* d'Euclide (→ chapitre 11, *Les Eléments*). La théorie des proportions qu'il propose permet de contourner le tabou pythagoricien sur les nombres irrationnels : si $\frac{x}{y}$ et $\frac{z}{t}$ sont identiques alors pour deux entiers quelconques a et b, on a les implications suivantes :

1. si $ax < by$ alors $az < bt$;

2. si $ax = by$ alors $az = bt$;

3. si $ax > by$ alors $az > bt$.

Que l'on peut traduire par :

1. si $\frac{x}{y} < \frac{b}{a}$ alors $\frac{z}{t} < \frac{b}{a}$;

2. si $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ alors $\frac{z}{t} = \frac{b}{a}$;

3. si $\frac{x}{y} > \frac{b}{a}$ alors $\frac{z}{t} > \frac{b}{a}$.

Eudoxe est l'initiateur de la méthode d'exhaustion, qui est présentée dans le livre XII des *Éléments*. Cela consiste à subdiviser une aire en une infinité de petites aires que l'on connaît, ce qui permet ensuite, par passage à la limite, de calculer l'aire de départ. Il utilise cette technique notamment pour montrer que :

1. l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré de son diamètre : $A = \frac{\pi}{4} \times d^2$

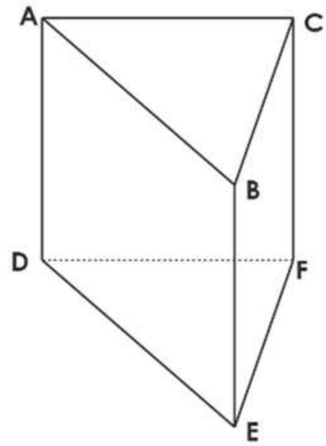
2. le volume d'une pyramide ou d'un cône est proportionnel à l'aire de sa base : $V = \text{aire base} \times \frac{\text{hauteur}}{3}$. Archimède reprendra cette méthode en la perfectionnant, pour calculer π notamment.

En astronomie, on peut le considérer comme le fondateur de l'astronomie scientifique. Les planètes n'ont pas un mouvement régulier, quand on les regarde depuis la Terre : elles vont vers l'est, puis ralentissent, s'arrêtent et rétrogradent vers l'ouest, ralentissent à nouveau, s'arrêtent et repartent vers l'est. Il a essayé de comprendre ces irrégularités apparentes des astres, par des considérations géométriques. Sa solution propose un système composé d'une vingtaine de sphères de cristal, portant toutes des objets célestes. Ces sphères seraient concentriques et la Terre en serait le centre.

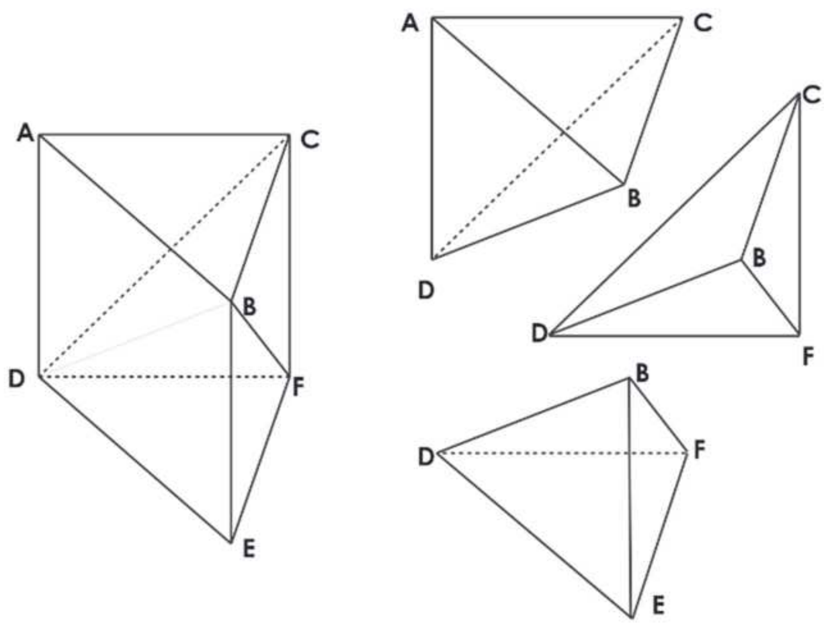
Le volume des pyramides et des cônes

Étape 1

Soit un prisme ABCDEF à base triangulaire.



On peut le découper en trois pyramides :



Les pyramides ayant même base et même hauteur sont de même volume.
Pour la pyramide ABCD, si on choisit ABC pour base, elle a pour hauteur AD.
Pour la pyramide BEFD, si on choisit DEF pour base, elle a pour hauteur EB.

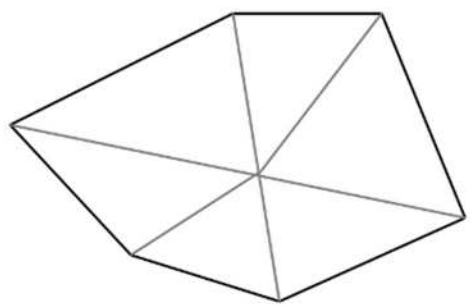
Comme ABC et DEF sont identiques et comme AD = EB (hauteur du prisme).
Alors elles ont le même volume.

Pour la pyramide BCDF, on choisit CDF pour base et pour la pyramide ABCD on choisit la base ACD. Or ACDF est un rectangle, donc les deux bases sont identiques. Les deux pyramides ont également la même hauteur : c'est la longueur BH, où BH est la distance du point B au plan ACDF. Donc elles ont le même volume.

On en conclut que les trois pyramides ont le même volume et donc le volume d'une pyramide à base triangulaire est égal au tiers du volume du prisme ayant la même base et la même hauteur que la pyramide.

Étape 2

Tout polygone est décomposable en plusieurs triangles : donc toute pyramide à base polygonale peut être décomposée en plusieurs pyramides à base triangulaires. Son volume est donc le tiers du volume du prisme ayant même base et même hauteur.

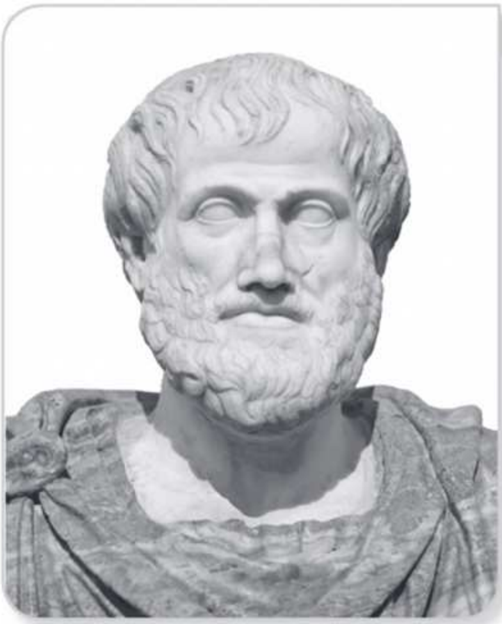


Étape 3

On généralise au cercle : tout cône a pour volume le tiers du volume du cylindre de même base et même hauteur.

Chapitre 10.

Aristote « le Logicien »



384-322 av. J.-C.

Il peut paraître étrange de parler d'Aristote ici : le personnage n'est pas spécialement connu pour ses travaux mathématiques, d'autant qu'il ne laissait à la matière qu'une place secondaire. Cependant, il a posé des notions qui ont eu une grande influence sur la formation des mathématiques.

Aristote est originaire de Stagire, en Macédoine. Il part s'établir à Athènes, où Il suit, durant vingt ans, les leçons de Platon. Il est ensuite précepteur du fils du roi Philippe de Macédoine, le futur Alexandre le Grand. En –355, il repart pour Athènes et fonde sa propre école, le Lycée. Il y crée une bibliothèque privée, comportant plus de 400 traités portant sur tous les sujets. En –323, à la mort d'Alexandre le grand, un mouvement anti-macédonien pousse Aristote à partir : il est suspecté de soutenir les Macédoniens et risque un procès pour impiété. Il se réfugie à Chalcis, où il mourra, un an plus tard.

Les travaux d'Aristote auront une grande influence dans la rédaction des *Eléments* : il pose les notions de définition, de théorème, d'axiome et de postulat.

Un **axiome** est une notion commune à toutes les sciences et pouvant être admise comme évidente. (C'est une opinion *commune*, une chose *commune*) Un axiome doit obéir au ***principe de non-contradiction*** : « une chose ne peut pas à la fois être et ne pas être. » et également au principe du tiers-exclu : une proposition et son contraire ne peuvent pas toutes les deux être fausses (ex : le tout est plus grand que la partie).

Un **postulat** est une proposition première, propre à une science et dépend des définitions et hypothèses données. Elle n'est pas forcément évidente en soi (ex. : Par deux points distincts, il passe une droite et une seule).

Une **définition** n'établit pas que la chose définie existe, il faut la prouver.

Enfin, un **théorème** est une proposition démontrée, donc prouvée.

Il envisage aussi la notion d'infini, mais en tant que potentiel : un segment, par exemple, est composé d'une infinité de points, mais il est impossible de le voir physiquement.

Il propose également de définir une nouvelle science : la logique, qui permet de poser les variables, ainsi que le raisonnement déductif :

« Si Socrate est un homme et si tous les hommes sont mortels alors Socrate est mortel » devient : si $A \rightarrow B$ et Si $B \rightarrow C$ alors $A \rightarrow C$.

Chez Aristote, le ciel évolue : la Terre est toujours au centre de l'Univers ; le Cosmos est formé de sphères centrées sur la Terre, qui est immobile.

Il définit deux régions distinctes :

- le **monde sublunaire**, décrit par la Lune tournant autour de la Terre, est formé des quatre éléments eau-air-terre-feu. Il est soumis au temps et à la corruption. C'est le monde imparfait, où vivent les hommes ;
- le **monde supralunaire**, situé entre la sphère lunaire et la sphère des étoiles fixes, formé d'un cinquième élément, l'éther. C'est dans ce monde que se déplacent le soleil et les planètes. Dans ce monde, vieillesse et décadence sont inconnues. C'est le monde parfait, où vivent les dieux.

Chapitre 11.

Euclide « le Mystérieux »


DEFINITIONES
ELEMENTI QVINCTI,
ET SEXTI, EVCLIDIS, AB
ELIA VINETO SANTONE
INTERPRETATAE.

BVRDIGALÆ,
Apud Simonem Millangium Burdigalensium
Typographum, via Iacobea,
1575.

Env. 325-265 av. J.-C.

Alors qu'à Alexandrie, Ptolémée 1er fait de la ville le centre culturel du monde civilisé, les mathématiques grecques ont beaucoup évolué. C'est à cette époque qu'Euclide choisit de s'installer à Alexandrie. Il est certainement d'origine grecque et aurait obtenu le poste de professeur à la bibliothèque.

On ne connaît rien de la vie d'Euclide. À tel point que l'on peut douter de son existence : il est tout à fait possible que sous le nom d'Euclide se cachent plusieurs mathématiciens, ou qu'Euclide soit un professeur qui, à la manière de Pythagore, aurait enseigné à des disciples qui auraient poursuivi son œuvre après sa disparition. En effet, l'étude des différents livres des *Éléments* incite à penser qu'ils ont été écrits par plusieurs personnes et non pas par un seul homme. Au Moyen Âge, on a même imaginé que le nom d'Euclide se traduisait du grec par « la clé de la géométrie ». En effet, clé (κλεισ) et deux (δισ) se prononcent (très) approximativement comme le nom du mathématicien et deux représente la droite et par extension la géométrie.

Tout comme Pythagore, Euclide enseignait à ses élèves que l'apprentissage doit se faire pour l'amour du savoir. Alors qu'il venait de terminer une leçon, un élève voulut savoir quel profit il allait en retirer. Alors Euclide appela un esclave :

> « Donne lui trois oboles (argent grec de l'époque), lui ordonna-t-il, puisqu'il faut absolument retirer un bénéfice de ce qu'il vient d'apprendre. »

Lorsqu'il s'attaque à la rédaction des *Éléments*, Euclide est en face d'une tâche énorme : il veut récapituler toutes les connaissances géométriques et arithmétiques amassées jusqu'à présent. C'est un ouvrage monumental : il sera composé de 13 livres. Mais plutôt que de compiler les données avec une référence historique, il décide de tout organiser méthodiquement. La réflexion est purement mathématique : il pose des définitions, des postulats et des notions ordinaires (axiomes), puis il classe les propositions dans un ordre logique. Et bien sûr, il propose systématiquement des démonstrations. Lorsque Ptolémée demanda à Euclide s'il n'y avait pas de chemin plus court que celui des Éléments pour comprendre les mathématiques, il lui aurait répondu qu'il n'y avait pas de voie royale en géométrie.

Différentes origines sont connues quant au contenu des *Éléments* :

- Pythagoriciens (env. –560 / –360) : livres I, II, IV et VI (chapitres 2 à 6).
- Hippocrate de Chios (env. –450) : livres III et IV (chapitre 4).
- Théétète d'Athènes (–415 / –369) : livres X et XIII (chapitre 8).
- Archytas de Tarente (env. –430 / –360) : livre VIII (chapitre 6).
- Eudoxe de Cnide (env. –408 /–355) : livres V et XI (chapitre 9).

Ce n'est qu'au XIIe siècle que l'occident découvrira *Les Éléments*, dans leur ensemble, une fois traduits en Latin. Cet ouvrage monumental est resté, pendant plus de 2000 ans, le plus diffusé et le plus étudié, si l'on excepte *La Bible*. Il sera l'ouvrage de référence en mathématiques jusqu'au XXe siècle. En 1935, un groupe de mathématiciens de l'École normale supérieure, sous l'impulsion d'André Weil, décide de faire le ménage : les mathématiques ont beaucoup évolué depuis Euclide et il est temps d'écrire un nouveau livre de référence. Le nom du livre sera *Éléments de mathématiques*. Et les mathématiciens choisissent de prendre un nom d'emprunt, N. Bourbaki. Cela ressemble beaucoup à l'hypothèse d'un Euclide qui n'existerait pas et qui serait en fait un groupe de mathématiciens, là aussi.

Les Éléments ne sont pas le seul ouvrage d'Euclide. De nombreux ouvrages lui ont été attribués. On connaît aujourd'hui, outre les 13 livres des *Éléments*, *Les Données* (traité de géométrie plane, qui complète *les Éléments*). *Les Phénomènes* (portant sur l'application de la géométrie de la sphère à l'astronomie). ***La division du canon*** (comment construire des droites qui divisent des figures données dans des proportions et des formes données) et ***l'Optique*** (problèmes de perspective).

Les Éléments

Les quatre premiers livres traitent de géométrie plane :

- **Livre 1** : 23 définitions, 5 postulats, 5 axiomes et 48 propositions. La proposition 47 n'est autre que le théorème de Pythagore et la proposition 48 sa réciproque.
- **Livre 2** : Algèbre géométrique (de l'école pythagoricienne)
- **Livre 3** : Géométrie du cercle
- **Livre 4** : Les Polygones réguliers

Les livres 5 et 6 traitent de proportion :

- **Livre 5** : Théorie des proportions
- **Livre 6** : Figures semblables. La proposition 2 est le théorème de Thalès et sa réciproque.

Les livres 7, 8 et 9 traitent d'Arithmétique :

- **Livre 7** : 22 définitions et 39 propositions
- **Livre 8** : 27 propositions
- **Livre 9** : 36 propositions

Livre 10 : Nombres incommensurables (comme le fameux $\sqrt{2}$, qui a été si fatal aux pythagoriciens !) (→ chapitres 3 et 8)

Les trois derniers livres traitent de géométrie dans l'espace :

- **Livre 11** : Géométrie dans l'espace
- **Livre 12** : Aires et volumes
- **Livre 13** : Les polyèdres réguliers. Il n'y en a que 5 et on les appelle « Solides de Platon » (→ chapitre 7).

Un **postulat** est une proposition première, propre à une science et dépend des définitions et hypothèses données. C'est ici une proposition qui affirme que certaines constructions sont possibles.

Voici les cinq postulats posés par Euclide dans son livre I :

- Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
- Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
- Tous les angles droits sont congruents (c'est-à-dire égaux).
- Par un point donné, il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

Un **axiome** est une notion commune, acceptée par tous :

- Deux choses égales à une troisième sont aussi égales entre elles : si $a = c$ et si $b = c$ alors $a = b$.
- Si des grandeurs égales sont ajoutées à d'autres grandeurs également égales entre elles, leurs sommes sont égales : si $a = b$ et si $c = d$ alors $a + c = b + d$.
- Si des grandeurs égales sont soustraites à d'autres grandeurs égales, leurs différences sont égales : si $a = b$ et si $c = d$ alors $a - c = b - d$.
- Des grandeurs qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles : si, en bougeant un objet de manière à l'amener sur un autre objet, on voit que ceux-ci coïncident parfaitement, alors ce sont les mêmes objets.
- Le tout est plus grand que la partie : si dans un sac il y a des billes rouges et des billes vertes, alors le nombre total de billes sera supérieur au nombre de billes rouges.

Le 5e postulat d'Euclide est celui qui a fait couler le plus d'encre. La proposition ne semblait pas être un postulat, mais plutôt un théorème. Pendant des siècles, les mathématiciens ont tenté, sans succès, de le démontrer à l'aide des 4 premiers postulats. Finalement, au XIXe siècle, les travaux de Gauss, Riemann et Lobatchevski ont montré qu'il était possible de concevoir de nouvelles géométries dites « non-euclidiennes » en adoptant un postulat différent : dans la géométrie hyperbolique, par un point extérieur à une droite, il passe une infinité de droites parallèles à cette droite. Par conséquent, le postulat des parallèles a bien sa raison d'être, dans la géométrie dite « euclidienne ».

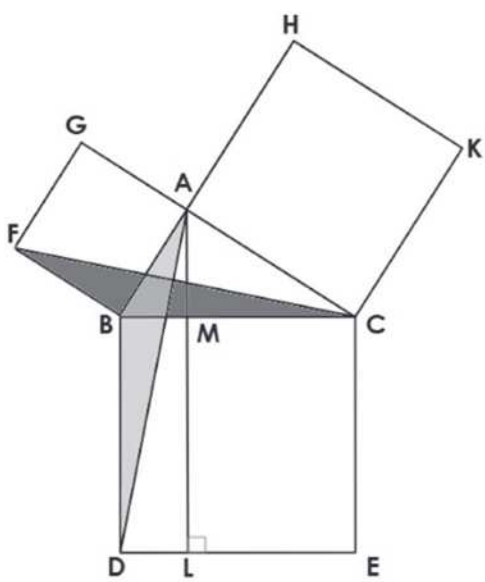
La démonstration du théorème de Pythagore

Le livre de Elisha Scott Loomis *The pythagorean proposition* (1940) recense 367 démonstrations différentes de ce théorème. Des grands noms comme Euclide, Fibonacci, Léonard de Vinci ou Leibniz y côtoient des maîtres d'école, des étudiants, des amateurs anonymes et même un président des États-Unis, James Abraham Garfield (1831-1881) !

Nous voyons ici la démonstration proposée par Euclide, mais écrite de manière moderne. C'est la proposition 42 :

> « dans les triangles rectangles, le carré décrit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit. »

Soit ABC un triangle rectangle en A. On construit des carrés sur les côtés [BC], [BA] et [AC]. Soit L le point de [DE] tel que (AL) ⊥ (DE).



$\widehat{BAC} = \widehat{BAG} = 90°$, donc A, C et G sont alignés.

De même B, A et H sont alignés.

Et puisque $\widehat{DBC} = \widehat{FBA}$ alors $\widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{FBA} + \widehat{ABC}$,

alors $\widehat{DBA} = \widehat{FBC}$.

Or DB = CB et BA = BF.

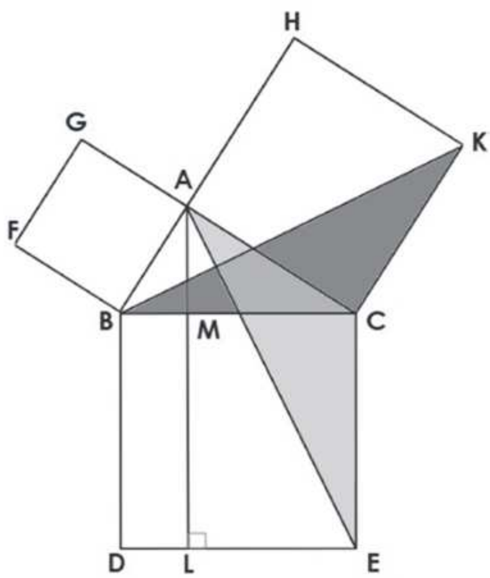
Donc les triangles DBA et FBC sont semblables ; par conséquent, ils ont la même aire.

$$\text{Or } \text{Aire}(\text{DBA}) = \frac{\text{BD} \times \text{BM}}{2} = \text{Aire}(\text{DBM}) = \text{Aire}\frac{(\text{BMLD})}{2}$$

$$\text{et } \text{Aire}(\text{FBC}) = \frac{\text{FB} \times \text{BA}}{2} = \text{Aire}(\text{FBA}) = \text{Aire}\frac{(\text{ABFG})}{2}$$

donc Aire (BMLD) = Aire (ABFG).

On démontre de la même façon que Aire (CMLE) = Aire (HKCA).



Par suite Aire (BMLD) + Aire (CMLE) = Aire (ABFG) + Aire (HKCA).

Or Aire (BMLD) + Aire (CMLE) = Aire (BCED)

et donc Aire (BCED) = Aire (ABFG) + Aire (HKCA).

On peut donc en déduire que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

La bibliothèque d'Alexandrie

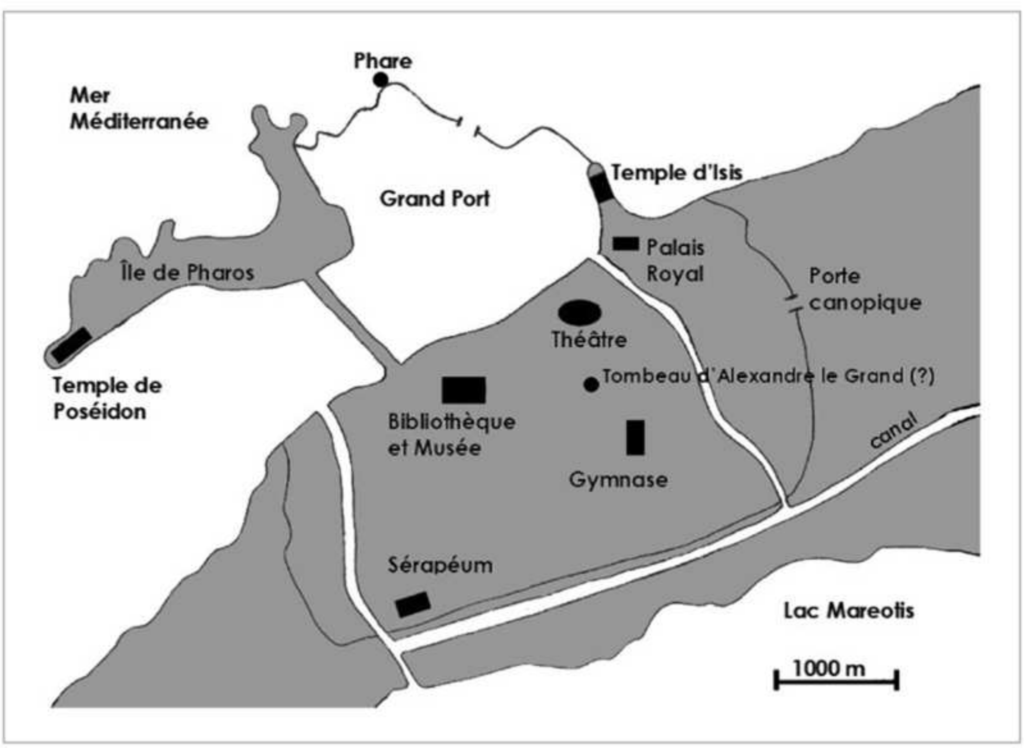
Alexandrie a été fondée par Alexandre le Grand. Il n'avait que 23 ans lorsqu'il traça le contour de la cité, le 20 janvier 331 av. J.-C. Après avoir conquis l'Égypte, il voulut y fonder une ville grecque qui porterait son nom. Malheureusement, il ne vécut pas suffisamment longtemps pour voir sa ville achevée. À sa mort, l'empire d'Alexandre a été partagé entre ses généraux. C'est Ptolémée qui obtint l'Égypte, en 306 av. J.-C. Il régna sous le nom de Ptolémée 1er et fonda ainsi la dynastie lagide, qui s'éteindra en –30, avec la mort de Cléopâtre. Avec l'aide de Démétrios de Phalère (Phalère est un port d'Athènes), Ptolémée fonda deux institutions qui firent la gloire d'Alexandrie : Le Musée et la Grande Bibliothèque. Le nom grec de papyrus est « byblos », c'est pourquoi on appelle cet endroit Bibliothèque et le Musée est appelé ainsi en l'honneur des Muses. Il est d'ailleurs fort possible que l'idée de la Bibliothèque et du Musée ait été inspirée d'Aristote. Le lieu est composé, outre la Bibliothèque, d'une grande salle, pour les repas, d'une promenade, de logements pour les pensionnaires, de salles de dissection, d'observatoires pour les astronomes. Et peut-être aussi d'un jardin zoologique.

Le projet de Démétrios était de rassembler dans un même lieu tout le savoir du monde. Mais créer une bibliothèque est une entreprise considérable. Il faut évidemment des livres pour remplir les étagères : une formidable chasse au livre fut donc lancée par Ptolémée. On sillonna les principaux marchés du monde méditerranéen, on acheta à prix d'or tous les manuscrits trouvés. Et lorsqu'on ne pouvait pas les acquérir, on se débrouillait pour les obtenir par des moyens moins "nobles" : sur tous les navires faisant escale à Alexandrie, Démétrios donnait l'ordre de réquisitionner les livres. Il les faisait recopier par des scribes, gardait l'original et rendait la copie. Bientôt, dans la Grande Bibliothèque d'Alexandrie, il y eut près de 600 000 rouleaux ! Il fallut construire un entrepôt, le Sérapéum, pour ranger une partie des livres. Cette bibliothèque attira de nombreux savants, des philosophes, des scientifiques, des artistes. Ils affluèrent en masse. Le premier directeur de cette bibliothèque fut Zénodote d'Éphèse et c'est à cette époque qu'Euclide aurait fréquenté le lieu, en tant que professeur.

Pour fabriquer des livres, il faut du papyrus. Et il en pousse beaucoup, dans le delta du Nil, juste à côté d'Alexandrie. Dès que le papyrus est coupé, il se dessèche. Il faut donc traiter la feuille immédiatement, ce qui ne peut se faire qu'à proximité de l'endroit où pousse la plante. L'Égypte a donc été le fournisseur exclusif de papyrus de tout le monde grec. Les livres avaient la forme de rouleaux ; ces rouleaux étaient composés de feuilles de papyrus que l'on collait les unes aux autres pour former une bande que l'on enroulait autour d'un bâton. Les textes étaient écrits en grec ou en démotique, c'est-à-dire en égyptien. Seul un côté de la feuille était utilisé par les scribes, qui se servaient pour écrire d'un petit roseau pointu, le calame. Pour les lire, il fallait utiliser les deux mains : l'une tenait l'extrémité de la feuille, l'autre déroulait la bande de papyrus.

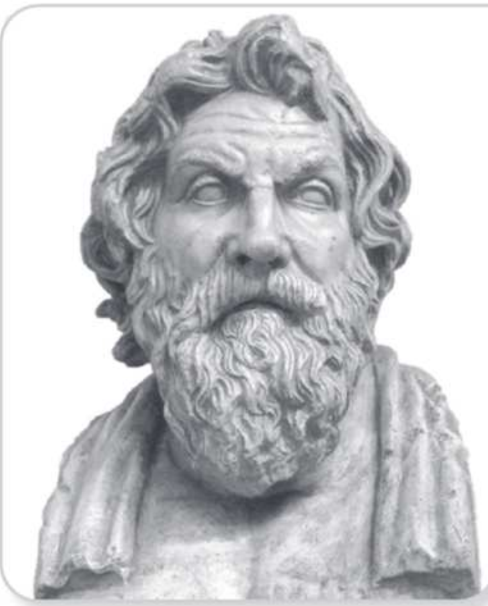
Après la construction de la bibliothèque à Alexandrie, des répliques ont poussé un peu partout : notamment à Pergame, qui se posait en grande rivale d'Alexandrie. Mais Ptolémée 1er était en position de monopole, avec le papyrus ; il en profita et décida d'interdire son exportation. Pergame, sans papyrus, ne pouvait plus recopier de livre. Mais ce fut un mauvais calcul : en désespoir de cause, on mit au point une méthode pour créer du papier à partir de peaux de bêtes et on inventa ainsi le parchemin. Alexandrie perdit le monopole du papier.

Lors de la guerre qui oppose Pompée à Jules César, en 48 av. J.-C., César poursuit Pompée jusqu'à Alexandrie. C'est d'ailleurs à ce moment qu'il rencontre Cléopâtre. Afin de se préserver de ses attaquants, le général romain incendie la flotte égyptienne. Mais le feu se propage et la bibliothèque est touchée. 40 000 rouleaux de papyrus sont détruits. Plus tard, Marc Antoine offrira à Cléopâtre 200 000 rouleaux provenant de la bibliothèque de Pergame pour remplacer les livres brûlés. Après la mort de Cléopâtre, la bibliothèque subit les aléas de l'histoire de l'Égypte : elle devient institution publique de la province romaine. Mais les querelles religieuses entre les différentes communautés provoquent des affrontements. En 391, l'évêque Théophile ordonne la destruction des temples, statues et livres païens, afin d'asseoir la religion chrétienne (→ chapitre 21). Et en 642, Alexandrie fut envahie par l'émir Amrou Ben al'As. Ce fut l'occupation musulmane. Le calife Omar aurait ordonné lui aussi la destruction des livres.



Chapitre 12.

Aristarque « le Visionnaire »



310-230 av. J.-C.

Tout comme Pythagore, Aristarque est originaire de Samos. Mais c'est à Alexandrie, au sein de la bibliothèque, qu'il réalise les calculs rassemblés dans son livre ***Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune.*** Il est également l'un des précurseurs de la théorie héliocentrique : bien avant Galilée ou Copernic, il affirme que les étoiles et le Soleil sont immobiles et que la Terre tourne autour du Soleil. Sa théorie n'a pas retenu l'attention et le livre dans lequel il présente son système a été perdu. Seul Archimède, dans l'***Arénaire***, en fait mention. (→ chapitre 14, *Le nombre de grains de sable de l'univers*)

Distances et diamètres

Une petite remarque préalable : la trigonométrie n'était pas encore en place à l'époque d'Aristarque. Mais pour des raisons évidentes de simplification, on utilisera les outils et notations modernes.

Il suppose que :

1. la Lune reçoit sa lumière du Soleil ;

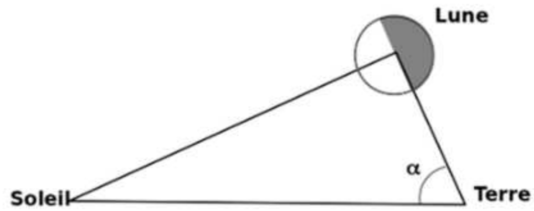
2. la Terre est considérée comme un point et comme le centre de l'orbite de la Lune ;
3. lorsque la Lune nous paraît dikhotome (coupée en deux portions égales), elle offre à nos regards son grand cercle, qui détermine la partie éclairée et la partie obscure de cet astre ;
4. lorsque la Lune nous paraît dikhotome, sa distance au Soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart ;
5. la largeur de l'ombre est de deux lunes.

Nous allons préciser les points 4 et 5.

Point 4

Notons SLT le triangle Soleil-Terre-Lune.

Lorsque la Lune est au dernier quartier, on voit un grand cercle de la Lune et SLT est rectangle en L. Aristarque avait remarqué que la Lune faisait un tour complet autour de la Terre en 29 jours. Il avait également remarqué qu'entre le dernier quartier et la nouvelle Lune (lorsque la Lune n'est plus visible de la Terre), il se passait 7 jours.



Ainsi :

Durée (jours)	29	7
Angle (°)	360	x

Donc $x = \dfrac{360 \times 7}{29} \approx 87°$.

Cela correspond au quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart et $\alpha = \dfrac{360°}{4} - \dfrac{360°}{4 \times 30} = 90 - 3 = 87°$. **(1)**

STL est un triangle rectangle en L, donc $\cos\alpha = \dfrac{TL}{TS}$

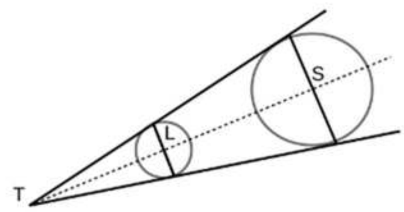
et donc $\dfrac{TS}{TL} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos 87°} \approx 19{,}11°$.

Par conséquent distance Terre-Soleil ≈ 19 × distance Terre-Lune.

De plus, puisque les éclipses totales de Soleil sont possibles, les diamètres apparents du Soleil et de la Lune sont quasiment égaux (le diamètre apparent est l'angle sous lequel un observateur voit l'astre).

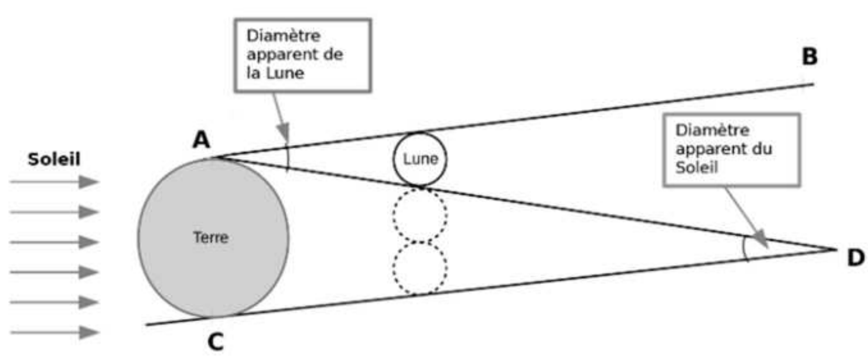
Or d'après le théorème de Thalès : $\frac{TS}{TL} = \frac{\text{diamètre Soleil}}{\text{diamètre Lune}} \approx 19$.

Et donc diamètre Soleil ≈ 19 × diamètre Lune.



Point 5

En observant les éclipses de Lune, il constate que les éclipses durent environ deux heures. Il remarque qu'à chaque heure la Lune avance par rapport à l'ombre de la Terre de une fois son diamètre. Il en conclut que l'ombre provoquée par la Terre est deux fois plus grande que le diamètre de la Lune. **(2)**



Construisons un cylindre de diamètre la Terre. On vient de voir qu'on peut placer deux lunes dans cette ombre.

De plus $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ADC}$ sont alternes-internes et (AB)//(CD)

donc $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$.

Or $\widehat{ADC}$ est le diamètre apparent du Soleil et donc on peut considérer que $\widehat{BAD}$ est le diamètre apparent de la Lune, car ces deux diamètres apparents sont égaux. On peut en conclure que dans le cylindre de diamètre Terre, on peut mettre trois lunes.

Et donc diamètre Lune ≈ 1/3 diamètre Terre.

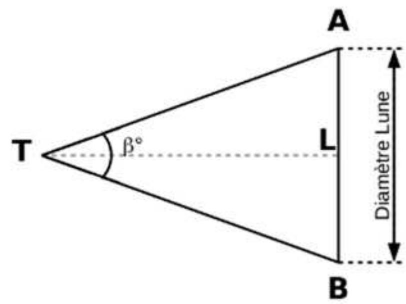
Par suite, diamètre Soleil ≈ $\dfrac{19}{3}$ × diamètre Terre.

On en déduit que diamètre Soleil ≈ 6,33 × diamètre Terre.

D'autre part, Aristarque suppose que le diamètre apparent de la lune est de $\beta = 2°$. **(3)**

TAB est un triangle isocèle en T et L milieu de [AB] donc TAL est rectangle en L et $\widehat{ATL} = 1°$.

On peut écrire que $\tan\widehat{ATL} = \dfrac{LA}{TL} = \dfrac{AB}{2TL}$, soit $\tan 1° = \dfrac{\text{diamètre Lune}}{2TL}$.



Et donc $TL = \dfrac{\text{diamètre Lune}}{2\tan 1°}$ ou encore TL ≈ 29 × diamètre Lune.

Par suite Distance Terre-Lune ≈ 9,5 diamètre Terre

et TS = 19 × TL, donc Distance Terre-Soleil ≈ 180,5 diamètre Terre.

Bien sûr, on constate que les résultats sont faux, à la lumière de nos connaissances actuelles.

(1) L'angle α n'est pas tout à fait juste : la bonne valeur est de 89,85°. Cela n'a l'air de rien, mais si on reprend le calcul, $\dfrac{1}{\cos 89{,}85°} \approx 382$ au lieu de 19 !

(2) En fait, l'ombre de la Terre peut contenir 2,6 lunes.

(3) L'angle de la Lune n'est pas de 2°, mais de 0,5°. L'erreur est étonnante, étant donné qu'Archimède, dans l'*Arénaire*, cite Aristarque et lui fait utiliser la valeur de 0,5°. On peut penser alors que les valeurs prises par Aristarque dans son livre ne sont qu'hypothétiques, ses calculs ayant plus une valeur didactique que physique.

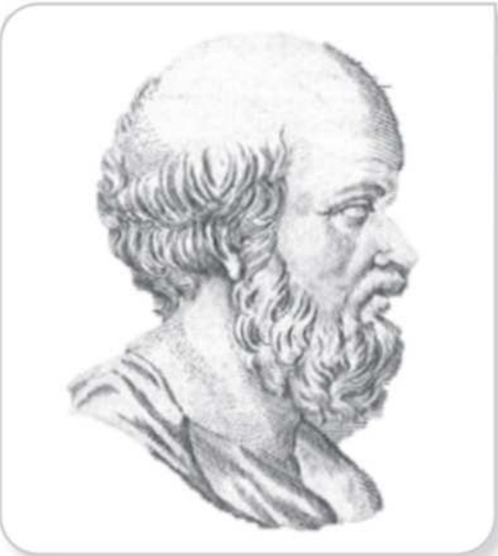
En prenant 12 742 km pour le diamètre de la Terre :

	Valeurs Aristarque	Valeurs Aristarque rectifiées	Valeurs réelles
Diamètre Lune	4 247 km	3539 km	3 474,2 km
Diamètre Soleil	80 657 km	1 352 068 km	1 392 700 km
Distance Terre-Lune	121 049 km	405 588 km	384 400 km
Distance Terre-Soleil	2 299 931 km	154 934 571 km	149 600 000 km

Il faut néanmoins faire remarquer qu'Aristarque a réalisé une véritable prouesse : non seulement les raisonnements sont justes et particulièrement astucieux, les erreurs n'étant dues qu'à des difficultés de mesure, mais surtout il a eu une idée réellement révolutionnaire, lorsque l'on pense aux croyances de ses contemporains : pour eux, Soleil et Lune avaient la même taille, le Soleil était plus petit que la Terre. Et bien sûr, le Soleil n'était pas au centre du système.

Chapitre 13.

Ératosthène « le Géomètre »



Env. 276-194 av. J.-C.

Ératosthène est né en 276 av. J.-C. environ, à Cyrène, sur la côte sud de la Méditerranée (actuelle Libye). Jusqu'à l'âge de 40 ans, il séjourne à Athènes, puis il rejoint le roi Ptolémée III, à Alexandrie. Il devient le précepteur de son fils, futur Ptolémée IV et assurait des cours en tant que professeur à la bibliothèque. Il en est même le directeur. Il suit également les cours d'Astronomie et de Mathématiques d'Aristarque de Samos (→ chapitre 12), avant de se lier d'amitié avec Archimède (Cf. chapitre 14), lors des séjours en Égypte du savant sicilien.

En tant que directeur de la bibliothèque, Ératosthène a eu tout le loisir de consulter les papyrus. Il s'est intéressé à beaucoup de disciplines : Philosophie, Poétique, Histoire, Musique, Mathématiques, ou encore Astronomie. C'est aussi un athlète confirmé, ce qui lui vaut le surnom de *Pentathlos*. Ses élèves lui ont trouvé un autre surnom : β (bêta, 2ᵉ lettre de l'alphabet grec). On n'est pas certain de l'explication : certains expliquent que, dans chaque discipline, il n'est que le second ; d'autres expliquent que cela vient de la numérotation de la classe où il enseigne. Apollonius, un autre professeur, serait surnommé ε (epsilon).

Il mourut à l'âge de 82 ans. Devenu aveugle, il se serait laissé mourir de faim parce qu'il ne pouvait plus lire, ni observer les étoiles.

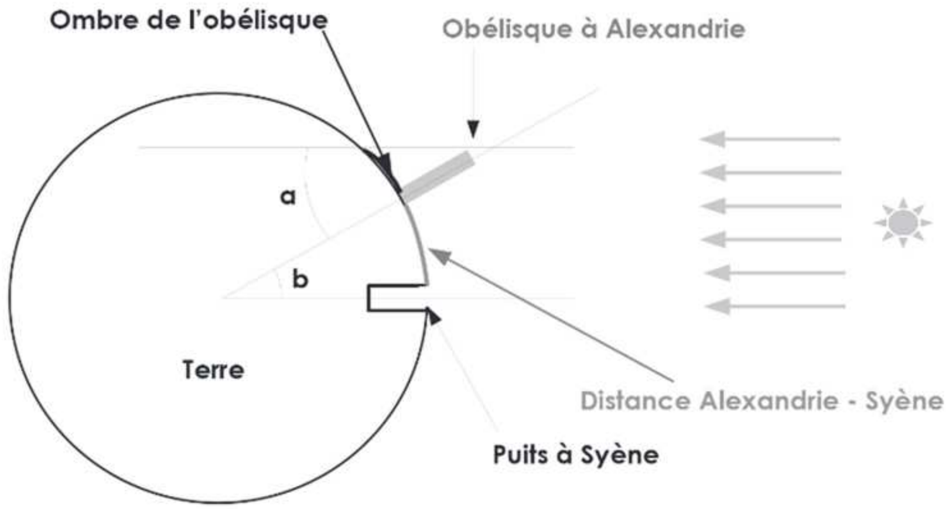
■ Les découvertes d'Ératosthène :

- il inventa la méthode pour trouver les nombres premiers et que l'on désigne sous le nom de crible d'Ératosthène ;
- il répertoria, dans son catalogue *Catastérismes 736* étoiles ;
- il fut le premier homme à calculer la circonférence de la Terre ;
- il crée la discipline que l'on appelle "géographie".

On a donné son nom à un astéroïde en son honneur.

Le calcul de la circonférence de la Terre

Ératosthène avait remarqué que lorsque le soleil est à son zénith (à midi, donc), on peut voir son reflet dans le fond d'un puits, à Syène (Actuelle Assouan). Mais au même moment, à Alexandrie, l'obélisque a une ombre. À l'époque d'Ératosthène, on sait déjà que la Terre est ronde. Cette ombre va donc lui permettre de calculer son rayon.

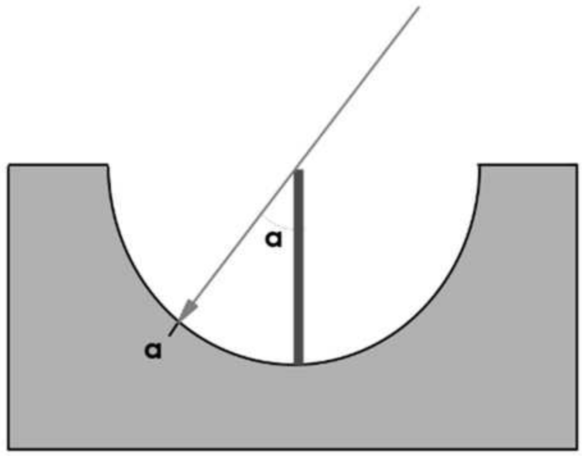


D'une part, Alexandrie et Syène sont sur le même méridien, donc a et b sont dans le même plan.

D'autre part, les rayons du Soleil sont considérés parallèles, car le Soleil est très éloigné de la Terre et les deux angles a et b sont alternes-internes.

Donc les deux angles sont égaux.

Pour mesurer cet angle a, Ératosthène utilise un gnomon circulaire, à Alexandrie :



Il trouve que l'angle a mesure un 50e d'un grand cercle, soit donc $\frac{360^\circ}{50} = 7{,}2^\circ$.

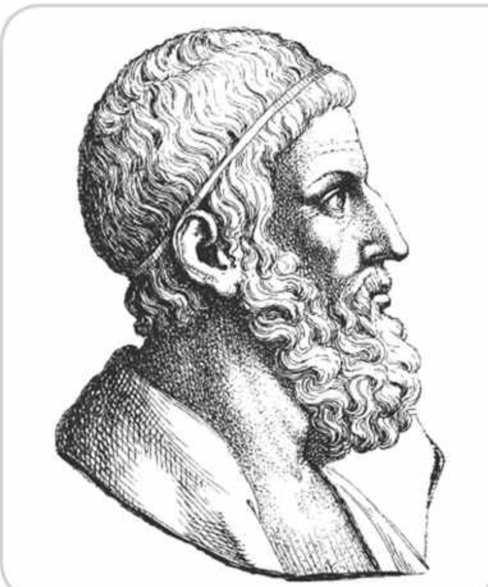
Ératosthène n'avait plus qu'à mesurer la distance Alexandrie-Syène. C'est ici que se pose le plus gros problème : comment a-t-il fait ? Plusieurs hypothèses ont été émises : des caravanes faisaient régulièrement le trajet. Peut-être a-t-il calculé la distance cherchée en tenant compte de la vitesse moyenne des caravanes et du temps qu'elles mettaient pour faire le trajet. Il est possible aussi qu'il ait compté les pas des chameaux, qui sont réputés pour avoir un pas très régulier. Mais peut-être a-t-il utilisé les services d'un métreur, ou peut–être a-t-il fait une moyenne avec toutes ces mesures. Toujours est-il qu'il a fini par obtenir que la distance séparant les deux villes était de 5000 stades.

Longueur d'1° de méridien = 5000 : 7,2 ≈ 700 stades.
P = longueur d'un méridien ≈ 700 × 360 ≈ 252 000 stades.
Or un stade égyptien valait 157,5 m, ce qui nous donne donc :
P ≈ 252 000 × 157,5 ≈ 39 690 000 m ≈ 39 690 km.

Un résultat particulièrement précis pour l'époque, puisque les méridiens ont une longueur de 40 000 km !

Chapitre 14.

Archimède « le Physicien »



Env. 287-212 av. J.-C.

Archimède est souvent considéré comme le plus grand savant de l'antiquité. Il a passé sa jeunesse à Syracuse, en Sicile. Il part à Alexandrie pour étudier et y rencontre notamment Ératosthène (→ chapitre 13), avec qui il gardera des liens. Ses travaux ne sont pas uniquement mathématiques : il est également un remarquable ingénieur. On lui doit l'invention de la poulie, des roues dentées, des engrenages ou des vis sans fin, par exemple. Il a également établi la théorie des leviers :

> « Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde ! »

Le roi de Syracuse, Hérion II, avait commandé une couronne en or à un artisan. Mais il avait un doute sur la teneur en or de sa couronne et soupçonnait l'artisan d'avoir gardé une partie de l'or confié, le remplaçant par de l'argent, moins cher, pour la confection de la couronne. Il demanda à Archimède de vérifier s'il y avait une fraude. L'or pesant plus lourd que l'argent, il suffisait de vérifier la masse de la couronne et de la comparer à la masse d'un objet en or de même volume. Le problème étant qu'il ne fallait pas détruire la couronne. Lors d'une baignade, le savant découvrit ce qu'on appelle maintenant « le principe d'Archimède », à savoir :

> « Tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale égale au poids du fluide déplacé. »

Il aurait été si heureux de sa découverte qu'il serait sorti de son bain et aurait couru dans la ville, nu, en s'écriant : « Eurêka ! » (« j'ai trouvé »).

Grâce à ce principe, il put résoudre le problème de la couronne et satisfaire le roi : en plongeant la couronne dans un récipient plein d'eau, il peut déterminer le volume de celle-ci en regardant l'élévation du niveau de l'eau. Après avoir pesé la couronne, il plonge une masse égale d'or et constate que cette fois-ci, le volume est inférieur à celui de la couronne. Il y a donc bien eu fraude. On peut toutefois remarquer qu'Archimède n'a pas réellement utilisé son principe pour mesurer le volume de la couronne, malgré ce que la tradition évoque, mais seulement une notion de masse volumique.

On raconte également qu'il aurait réussi à incendier les voiles des bateaux romains qui essayaient d'envahir Syracuse : il aurait utilisé des miroirs paraboliques (courbés) pour concentrer les rayons du Soleil sur les voiles ennemies. Les Romains finirent tout de même par envahir la ville. Mais, bien que le général Marcellus eût ordonné qu'on l'épargnât, Archimède fut tué par un soldat qui ne l'avait pas reconnu : il était en train d'étudier une figure tracée sur le sol, quand le romain entra. Ignorant les événements qui se passaient dans la ville, il aurait demandé à son visiteur de se pousser parce qu'il faisait de l'ombre sur sa figure. Le prenant pour un sorcier, le soldat l'aurait alors tué. Il est en fait beaucoup plus probable que le romain, voyant tous les objets de valeur du savant, l'ait tué pour le voler. Le général Marcellus lui fit construire une tombe, sur laquelle, selon ses vœux, est gravée une sphère inscrite dans un cylindre.

Bien sûr, Archimède est connu pour ses calculs sur le nombre π, ainsi que sur les calculs d'aire et de volumes du cylindre et de la sphère. Il a également compté le nombre de grains de sable contenus dans l'univers. Ératosthène (→ chapitre 13) était une connaissance d'Archimède. En tant que directeur de la bibliothèque d'Alexandrie, celui-ci a publié certains écrits du savant.

Les ouvrages d'Archimède sont :

- *De l'équilibre des plans,*
- *La quadrature de la parabole,*
- *De la sphère et du cylindre,*
- *Des spirales,*
- *Les conoïdes et les sphéroïdes,*
- *Des corps portés par un fluide,*

- *La mesure du cercle,*
- *L'arénaire.*

On a également une lettre adressée à Ératosthène, dans laquelle Archimède révèle une partie de ses découvertes.

La mesure du cercle

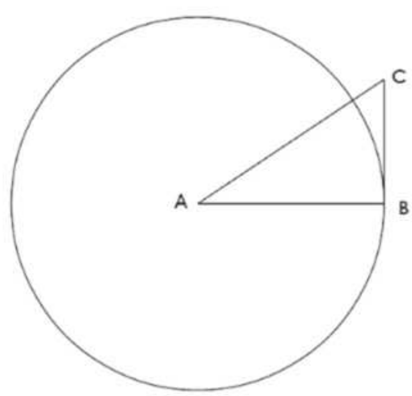
Dans cet ouvrage, Archimède s'intéresse au cercle en général et au nombre π en particulier. Il établit des propositions, notamment celle que :

$$\text{Aire cercle} = \frac{\text{Rayon} \times \text{périmètre}}{2}.$$

Nous allons regarder plus précisément la proposition 3, dans laquelle il fait un encadrement du nombre π. Bien sûr, pour des raisons évidentes de simplification, nous allons utiliser des notations modernes. Cependant, afin de préserver la démonstration originale, nous avons laissé les valeurs numériques données par Archimède.

1re partie

Soit un cercle de rayon AB et (BC) une tangente à ce cercle.

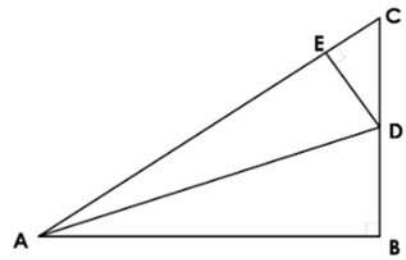


Le point C est tel que $\widehat{BAC} = 30°$.

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \sin 30° = \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{AC}{BC} = 2 = \frac{306}{153}.$$

Mais si on pose AC = 306 alors BC = 153.
Et donc, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 306^2 - 153^2$.
Ainsi AB = 265,... et donc $\frac{AB}{BC} > \frac{265}{153}$.

■ Partageons l'angle $\widehat{BAC}$ en deux parties égales par la droite (AD) : Soit E le point de (AC) tel que (DE) $\perp$ (AC).



Comme (AD) est la bissectrice de $\widehat{CAB}$ et comme (DE)$\perp$(AC) et (DB)$\perp$(AB) alors DE = BD.
De plus Aire (ABC) = Aire (ABD) + Aire (ACD) donc

$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{AB \times BD}{2} + \frac{AC \times DE}{2}$.

Soit $AB \times BC = AB \times BD + AC \times DE$

ou encore $AB \times BC = AB \times BD + AC \times BD$

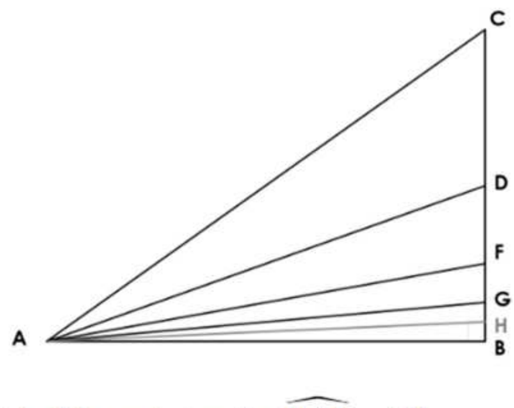
et $AB \times BC = BD \times (AB + AC)$, ainsi $\frac{AB}{BD} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}$.

Or $\frac{AC}{BC} = \frac{306}{153}$ et $\frac{AB}{BC} > \frac{265}{153}$ donc $\frac{AB}{BD} > \frac{571}{153}$.

Mais si on pose BD = 153 alors AB > 571, donc $\frac{AB^2 + BD^2}{BD^2} > \frac{571^2 + 153^2}{153^2}$.

Soit, par le théorème de Pythagore, $\frac{AD^2}{BD^2} > \frac{349450}{23409}$ et donc $\frac{AD}{BD} > \frac{591}{153}$.

■ Archimède réitère cette opération (le partage en deux) encore 3 fois :

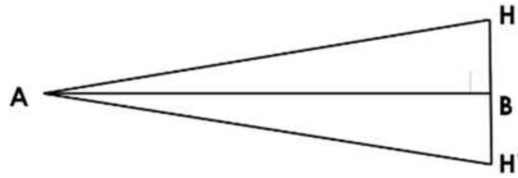


Il pose que [AF) est la bissectrice de $\widehat{DAB}$ et il prouve que $\frac{AF}{BF} > \frac{1172}{153}$.

Il pose ensuite que [AG) est la bissectrice de $\widehat{FAB}$ et donc que $\frac{AG}{BG} > \frac{2339}{153}$.

Enfin il pose que [AH) est la bissectrice de $\widehat{GAB}$ et donc que $\frac{AB}{BH} > \frac{4673}{153}$.

Soit H' le symétrique de H par rapport à la droite (AB) :



$\widehat{BAH} = \frac{30}{2^4} = \frac{90}{48}$.

Donc $\widehat{H'AH} = \frac{90}{24} = \frac{360}{4 \times 24}$.

Donc [HH'] est le côté d'un polygone régulier à $24 \times 4 = 96$ côtés, circonscrit au cercle.

Or $\frac{AB}{BH} > \frac{4673}{153}$ donc $\frac{2AB}{2BH} = \frac{\text{diamètre du cercle}}{HH'} > \frac{4673}{153}$.

Par suite $\frac{\text{diamètre du cercle}}{\text{périmètre du polygone}} > \frac{4673}{153 \times 96}$.

Donc $\frac{\text{diamètre du cercle}}{\text{périmètre du polygone}} > \frac{4673}{14688}$

ou encore $\frac{\text{périmètre du polygone}}{\text{diamètre du cercle}} < \frac{14688}{4673}$.

Or $\frac{14688}{4673} < 3 + \frac{1}{7}$ donc $\frac{\text{périmètre du polygone}}{\text{diamètre du cercle}} < 3 + \frac{1}{7}$

et à plus forte raison $\frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{diamètre du cercle}} < 3 + \frac{1}{7}$.

2e partie

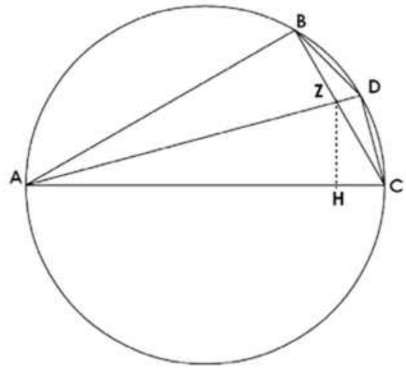
Soit le cercle de diamètre [AC].

Soit B le point du cercle tel que $\widehat{BAC} = 30°$.

ABC est un triangle rectangle en B, donc $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$

et $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{\sin 30°} = 2 = \frac{1560}{780}$.

On partage en 2 :
Soit D un point du cercle tel que [AD) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.



D'une part, $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

D'autre part, $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont deux angles inscrits qui interceptent l'arc $\widehat{BD}$ donc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.

Par suite, $\widehat{BCD} = \widehat{DAC}$.

De plus, $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ZDC}$ sont égaux, donc les triangles DAC et ZCD sont semblables, car leurs angles sont deux à deux égaux (deux figures sont semblables si l'une est un agrandissement de l'autre).

Donc $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{CD}{DZ} = \dfrac{AC}{CZ}$. **(1)**

Soit H le projeté de Z sur (AC) : (ZH)$\perp$(AC). Comme (AZ) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et comme (ZB)$\perp$(AB), alors ZB=ZH par définition de la bissectrice.

L'aire du triangle AZC peut se calculer de trois manières :

$$\text{aire}(AZC) = \frac{AC \times ZH}{2} = \frac{AZ \times DC}{2} = \frac{CZ \times AB}{2}.$$

Donc $AC \times ZH = CZ \times AB$.

Comme $ZH = ZB$, $AC \times ZB = CZ \times AB$ donc $AC \times (BC - CZ) = CZ \times AB$.

Ainsi $AC \times BC - AC \times CZ = CZ \times AB$,

soit encore $AC \times BC = CZ \times AB + AC \times CZ$.

Donc $AC \times BC = CZ \times (AB + AC)$.

Par suite $\dfrac{AC}{CZ} = \dfrac{AC + AB}{BC}$ ou encore $\dfrac{AC + AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$. Cf. **(1)**

Et donc $\dfrac{AD}{DC} < \dfrac{1560 + 1351}{780}$.

Par suite $\dfrac{AD}{DC} < \dfrac{2911}{780}$.

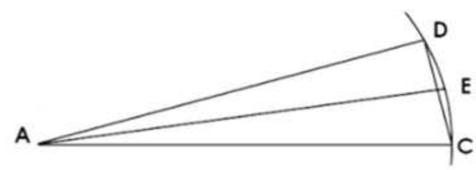
De plus, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AD^2 + DC^2$

donc $\dfrac{AC^2}{CD^2} = \dfrac{AD^2 + CD^2}{CD^2} = \dfrac{AD^2}{CD^2} + \dfrac{CD^2}{CD^2} < \dfrac{2911^2}{780^2} + \dfrac{780^2}{780^2}$

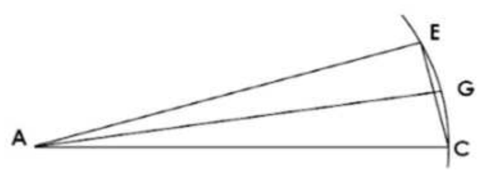
et donc $\dfrac{AC^2}{CD^2} < \dfrac{9082321}{780^2}$ soit donc $\dfrac{AC}{CD} < \dfrac{3013 + \frac{3}{4}}{780}$.

■ Archimède recommence le partage en deux encore 3 fois :

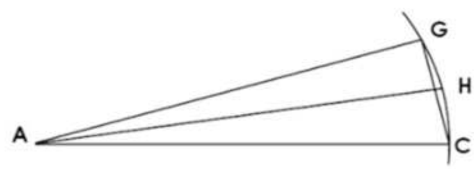
Il pose que [AE) est la bissectrice de $\widehat{DAC}$ et trouve que $\dfrac{AC}{EC} < \dfrac{1838 + \frac{9}{11}}{240}$.



Puis il pose que [AG) est la bissectrice de $\widehat{EAC}$ et établit que $\dfrac{AC}{CG} < \dfrac{1009 + \frac{1}{6}}{66}$.



Enfin il pose que [AH) la bissectrice de GAC et montre alors que $\dfrac{AC}{CH} < \dfrac{2017 + \frac{1}{4}}{66}$.



Cela nous donne donc $\dfrac{\text{diamètre du cercle}}{\text{périmètre du polygone}} < \dfrac{2017 + \frac{1}{4}}{96 \times 66}$.

Ainsi périmètre du polygone $> \dfrac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} \times$ diamètre du cercle.

Or $\dfrac{6336}{2017+\dfrac{1}{4}} > 3+\dfrac{10}{71}$

donc $\text{périmètre du polygone} > \left(3+\dfrac{10}{71}\right) \times \text{diamètre du cercle}$

et à plus forte raison :

$\text{périmètre du cercle} > \left(3+\dfrac{10}{71}\right) \times \text{diamètre du cercle.}$

Finalement, on obtient :

$$\left(3+\frac{10}{71}\right) \times \text{diamètre} < \text{périmètre du cercle} < \left(3+\frac{10}{70}\right) \times \text{diamètre.}$$

Remarque

Cela revient à écrire que $\left(3+\dfrac{10}{71}\right) < \pi < \left(3+\dfrac{10}{70}\right)$

ou encore $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

Mais Archimède ne pouvait pas écrire cela : non seulement l'écriture des nombres décimaux n'est utilisée qu'à la fin du XVIII^{e} siècle, mais de plus la notation π n'est pas connue à son époque et on sait que la lettre qui est l'initiale du mot *perifereia* (« *peripheria* ») qui signifie « circonférence », n'est pas apparue avant le XVI^{e} siècle.

Quand la poésie vient au secours de la mémoire...

Cette poésie permet de retrouver les décimales de π en comptant les lettres de chaque mot.

En voici un extrait :

3 14 1 5 9 2 6 5 3 5
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux Sages !

8 9 7 9
Glorieux Archimède, artiste ingénieux,

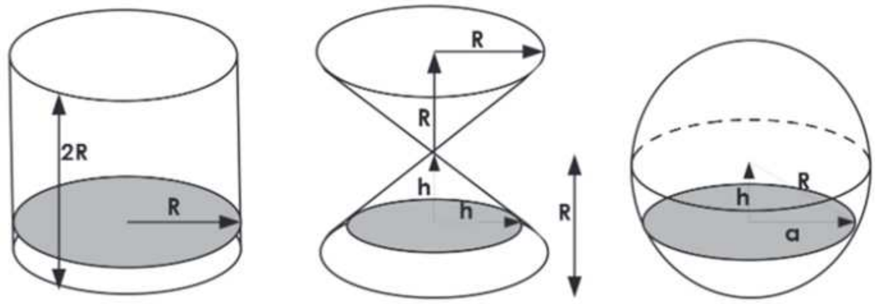
3 2 3 8 4 6 2 6
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire

4 3 3 8 3 2 7 9
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !

Soit donc 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279.

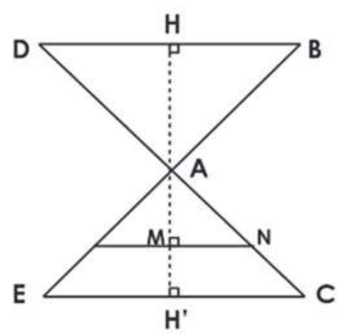
Volume de la sphère

On considère un cylindre, un cône et une sphère de même rayon R et de même hauteur 2R. Chaque solide est découpé en une fine tranche d'épaisseur e (en gris). Les trois zones grises sont à la même hauteur.



Notons que l'angle au centre du cône est un angle de 90° du fait que le cône a un rayon R et que sa hauteur est également égale à R.

En coupe verticale, cela donne un triangle rectangle isocèle :



Le triangle ABH est un triangle isocèle rectangle en H, donc $\widehat{HAB} = 45^\circ$.
Pour la même raison, $\widehat{H'AC} = 45^\circ$ et donc $\widehat{BAC} = 180 - 2 \times 90 = 90^\circ$.
De plus, AMN est également un triangle rectangle isocèle.
Donc si AM = h alors MN = h.
Donc le rayon de la tranche circulaire est égal à h.

On calcule les aires des trois zones :

- $A1 = \pi R^2$ (Aire du cercle gris dans le cylindre)
- $A2 = \pi h^2$ (Aire du cercle gris dans le cône)
- $A3 = \pi a^2$ (Aire du cercle gris dans la sphère)

Or d'après le théorème de Pythagore :
$R^2 = h^2 + a^2$ (→ *Le triangle rectangle dans la sphère*).
Donc A1 = A2 + A3.

Comme cette égalité est vraie pour n'importe quelle valeur h, elle est vraie pour toutes les tranches que l'on ferait.
En additionnant toutes les tranches et en rendant e le plus petit possible, on obtient $V_{\text{cylindre}} = V_{\text{sablier}} + V_{\text{sphère}}$.

La méthode utilisée ici porte le joli nom de ***principe des mille feuilles.***

$V_{\text{cylindre}} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur} = \pi R \wedge 2 \times 2R = 2\pi R^3$

$$\text{et } V_{\text{cône}} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{2 \times \pi R^2 \times R}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

$$\text{Donc } V_{\text{sphère}} = V_{\text{cylindre}} - V_{\text{cône}} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{6\pi R^3}{3} - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

■ Dans *De la sphère et du cylindre*, Archimède a également trouvé ce résultat :

> « Tout cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de cette sphère, est égal à trois fois la moitié de cette sphère et que la surface de ce cylindre [...] est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère. » (C'est la proposition XXXVII.)

En effet :

aire de la sphère = As = $4\pi R^2$;

aire du cylindre = Ac = $2\pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 6\pi R^2$;

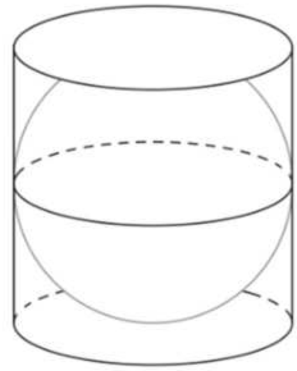
ce qui donne $\dfrac{Ac}{As} = \dfrac{6\ R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Et volume de la sphère = Vs = $\dfrac{4}{3}\pi R^3$;

volume du cylindre = Vc = $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$;

ce qui donne $\dfrac{Vc}{Vs} = \dfrac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{2 \times 3}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

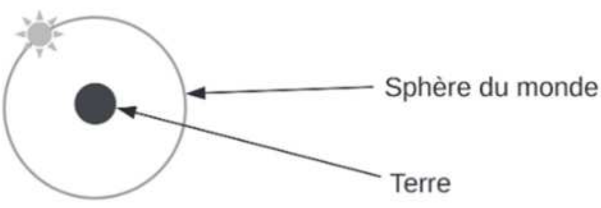
Archimède s'est tellement réjoui de cette trouvaille, qu'il a demandé que soit dessiné sur sa tombe un cylindre contenant une sphère :



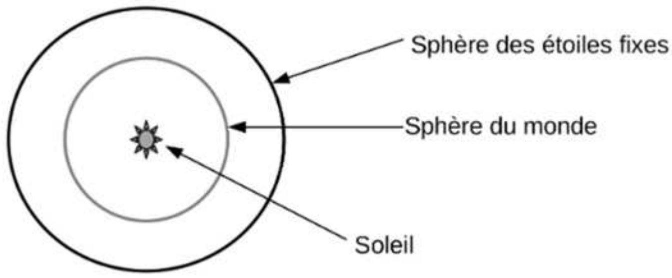
Le nombre de grains de sable de l'Univers

Dans l'*Arénaire*, Archimède se donne pour défi de compter le nombre de grains de sable qui se trouvent dans l'univers. Il s'agit surtout de proposer un système de numération qui permet de noter sans difficulté les très grands nombres, le système de numération grec étant assez limité. Pour montrer l'efficacité de son système de numération, il fera des estimations de la taille de l'Univers et il n'hésitera pas à prendre des nombres beaucoup plus grands que nécessaire. Par exemple, il choisit pour périmètre de la terre 300 myriades de stades, soit 3 000 000 de stades alors qu'Ératosthène a calculé 252 000 stades (1 myriade = 1 M = 10 000). De ce fait, il donnera une majoration du nombre de grains de sable.

Pour commencer, l'univers d'Archimède, c'est quoi ? À son époque, comme on l'a vu, on pense que la terre est au centre de l'univers et que le soleil tourne autour de la terre. C'est ce qu'on appelle le modèle géocentrique.



Aristarque de Samos (→ chapitre 12) propose un autre modèle : la terre tourne autour du soleil et le tout est placé dans une grande sphère, de centre le soleil : la sphère des étoiles fixes. C'est le modèle héliocentrique. C'est ce modèle que choisit de suivre Archimède.



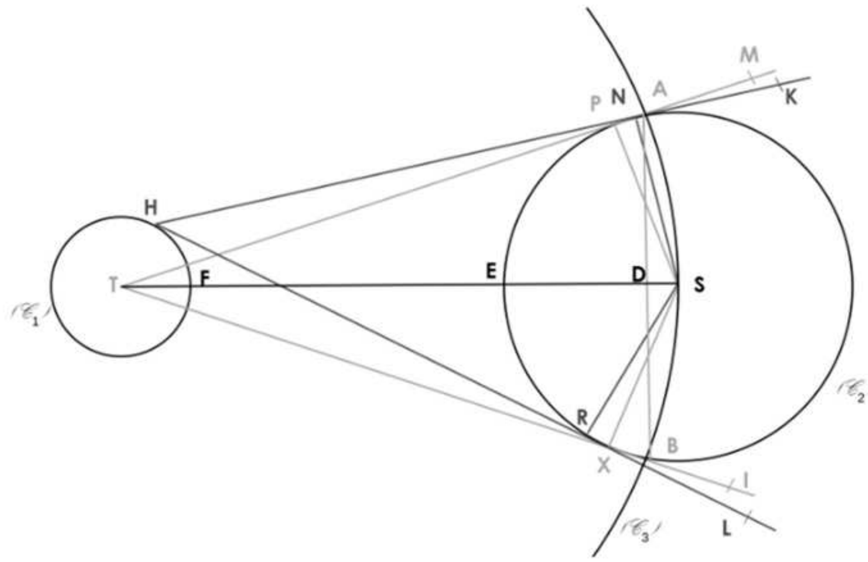
Résultat préalable

Soit un polygone régulier de 1000 côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère du Monde, c'est-à-dire un cercle de rayon Soleil-Terre.
Archimède démontre qu'un côté de ce polygone est inférieur au diamètre du Soleil.
En effet, supposons un plan conduit par le centre de la terre, par le centre du soleil et par l'œil de l'observateur, le soleil étant peu élevé au-dessus de l'horizon. Ce plan coupera la terre suivant le cercle C_1, le soleil suivant le cercle C_2 et la sphère du monde suivant le cercle C_3.
Que le point T soit le centre de la terre, le point S le centre du soleil et le point H l'œil de l'observateur.

Conduisons des droites tangentes au cercle C_2 :

- du point H les droites (HA) et (HL) tangentes respectives aux points N et R,
- et du point T les droites (TM) et (T I) tangentes respectives aux points P et X.

Que ces droites (TM) et (T I) coupent le cercle C_3 aux points A et B.
TS > HS, parce que l'on suppose le soleil au-dessus de l'horizon.



Donc $\widehat{(HK;HL)} > \widehat{(TM;TI)}$.

Or $\frac{90^\circ}{200} < \widehat{(HK;HL)} < \frac{90^\circ}{164}$ (1) (c'est une mesure faite par Archimède : l'angle a qui comprend le soleil et qui a son sommet à l'œil de l'observateur est tel que $\frac{90^\circ}{200} < a < \frac{90^\circ}{164}$).

Donc $\widehat{(TM;TI)} < \frac{90^\circ}{164}$.

Donc AB est plus petite que la corde de la 656e partie de la circonférence du cercle C_3 ($656 = 4 \times 164$.)

Or $\left(3+\frac{10}{71}\right) \times \text{diamètre} < \text{périmètre du cercle} < \left(3+\frac{10}{70}\right) \times \text{diamètre}$

de la Mesure du Cercle, prop. 3.

Soit donc $\frac{\text{périmètre du polygone}}{\text{diamètre}} < \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{diamètre}} < 3 + \frac{10}{70}$

et donc $\frac{\text{périmètre du polygone}}{\text{rayon}} < 2 \times \left(3+\frac{10}{70}\right)$

ou encore $\frac{\text{périmètre du polygone}}{\text{rayon}} < \frac{44}{7}$.

Par suite $\frac{BA}{TS} < \frac{44}{7 \times 656}$ soit $\frac{BA}{TS} < \frac{4 \times 11}{7 \times 4 \times 164}$ et donc $\frac{BA}{TS} < \frac{11}{1148}$.

Donc $\frac{BA}{TS} < \frac{1}{100}$ ou encore $BA < \frac{TS}{100}$.

Soit D le milieu de [AB].

$$\text{Aire}(\text{TSA}) = \frac{\text{TS} \times \text{AD}}{2} = \frac{\text{SP} \times \text{AT}}{2} \text{ donc } \text{TS} \times \text{AD} = \text{SP} \times \text{AT}.$$

Or TS = TA donc AD = SP = rayon du cercle $\mathscr{C}_2$.

Donc AB = diamètre du cercle $\mathscr{C}_2$.

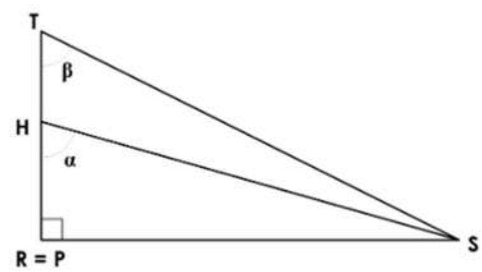
Par suite, le diamètre du cercle $\mathscr{C}_2$ est plus petit que la 100e partie de TS.

Mais le diamètre du cercle $\mathscr{C}_1$ est plus petit que le diamètre du cercle $\mathscr{C}_2$, donc $\text{TF} + \text{SE} < \frac{\text{TS}}{100}$.

Soit $\text{TS} - \text{FE} < \frac{\text{TS}}{100}$ donc $\text{TS} - \frac{\text{TS}}{100} < \text{FE}$ ou encore $\frac{99\text{TS}}{100} < \text{FE}$

et donc $\frac{\text{TS}}{\text{FE}} < \frac{100}{99}$.

De plus, dans les triangles rectangles TSP et HSR :



SP = SR et TP > HR.

$$\tan\alpha = \frac{\text{RS}}{\text{HR}} \text{ et } \tan\beta = \frac{\text{PS}}{\text{TP}} = \frac{\text{RS}}{\text{TP}} \text{ donc } \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\text{RS}}{\text{HR}} \times \frac{\text{TP}}{\text{RS}} = \frac{\text{TP}}{\text{HR}}.$$

Or $\alpha < \tan\alpha$ et comme β est petit, on peut écrire $\beta \approx \tan\beta$.

Donc $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$, ainsi $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\text{TP}}{\text{HR}}$.

Donc $\frac{\widehat{(\text{HK};\text{HL})}}{\widehat{(\text{TM};\text{TI})}} < \frac{\text{TP}}{\text{HR}}$.

De plus, on peut affirmer que $\frac{\text{TP}}{\text{TR}} < \frac{100}{99}$

donc $\frac{\widehat{(\text{HK};\text{HL})}}{\widehat{(\text{TM};\text{TI})}} < \frac{100}{99}$.

Ainsi $\widehat{(\text{TM};\text{TI})} > \widehat{(\text{HK};\text{HL})} \times \frac{99}{100}$.

$$\text{Mais } \left(\widehat{HK;HL}\right) > \frac{90^\circ}{200} \text{ (cf. 1)}$$

$$\text{donc } \left(\widehat{TM;TI}\right) > \frac{90^\circ}{200} \times \frac{99}{100} > \frac{90^\circ}{203}.$$

Donc AB est plus grand que la corde d'un arc de la circonférence du cercle $\mathscr{C}_3$ divisée en 812 parties. ($812 = 203 \times 4$)
Mais le diamètre du Soleil est égal à AB et donc le diamètre du Soleil est plus grand que le côté d'un polygone de mille côtés.

Pour plus de clarté, dans la suite, on utilisera les notations :

- 1 M = 1 myriade = 10 000 = 10^4 ;
- 1 MS = 1 myriade de stades = 10^4 stades ;
- 1 MMS = 1 myriade de myriade de stades = 10^8 stades ;
- et P = périmètre, ∅ = diamètre, V = volume.

Notons que $P = \varnothing \times \pi$ or $\pi > 3$ donc $P > \varnothing \times 3$ ou encore $\varnothing < P/3$.

Archimède suppose que P(Terre) < 300 MS.
Or ∅(Terre) < P(Terre)/3 donc ∅(Terre) < 100 MS.

Il suppose de plus que ∅ (Soleil) < 30 × ∅ (Lune) et que ∅ (Lune) < ∅ (Terre).
Donc ∅ Soleil < 30 × ∅ Terre soit donc ∅ Soleil < 30 × 100 MS.
Par suite ∅ (Soleil) < 3000 MS.

Soit A un polygone régulier de 1000 côtés inscrit dans un grand cercle de la sphère du Monde, c'est-à-dire un cercle de rayon Soleil-Terre.

D'après le résultat préalable, P(A) < 1000 × ∅ (Soleil).
Donc P(A) < 1000 × 3000 MS c'est-à dire P(A) < 300 MMS,
soit P(A)/3 < 100 MMS.

Par conséquent ∅ (Monde) < 100 MMS.

D'autre part, Aristarque dit que la Terre est à la sphère du Monde comme la sphère du Monde est à la sphère des étoiles fixes, c'est-à-dire l'univers.
∅ (Monde) < 100 MMS et ∅ (Terre) < 100 MS.
Donc ∅ (Monde) < 10 000 × ∅ (Terre),
donc ∅ (Univers) < 10 000 × ∅ (Monde).

Par suite ∅ (Univers) < 100 MMMS.

Les nombres d'Archimède

Archimède reproche à la numération grecque de ne pas être optimale pour compter les (très) grands nombres : c'est un système de numération qui note par groupes de quatre chiffres, le dernier nombre de ce système sera 9999 myriades et 9999 unités (9999 **M** 9999) et le suivant sera la myriade de myriade (1 **M M).** Ensuite, ce sont myriades de myriades, myriades de myriades de myriades, etc. Il modifie donc le procédé : les nombres qui vont jusqu'à une myriade de myriades (soit 10^8) sont appelés premiers nombres (N1), ensuite une myriade de myriades des premiers nombres devient l'unité des seconds nombres (N2) ; Une myriade de myriades des seconds nombres devient l'unité des troisièmes nombres (N3) :

$$1\ N2 = 10^8,\ 1\ N3 = 10^{8\times2} = 10^{16},\ 1\ N4 = 10^{8\times3} = 10^{24},\ \ldots,\ 1\ N8 = 10^{8\times7} = 10^{56}.$$

Dans notre système moderne, pour noter des nombres très grands, on utilise les puissances de 10 :

$$100 = 10^2,\ 1\ 000 = 10^3,\ 1M = 10\ 000 = 10^4.$$

Si on fait le produit de deux nombres, il suffit d'ajouter les exposants :

$$10^3 \times 10^3 = 10^{3+3} = 10^6.$$

Archimède démontre que cette propriété est valable pour une base quelconque :

$$\text{base(a)} \times \text{base(b)} = \text{base(a + b)}.$$

(On se servira de cette propriété un peu plus loin.)

Le nombre de grains de sable

Archimède fait ensuite des estimations sur le nombre de grains de sable compris dans un volume donné : dans un volume d'une graine de pavot, il y a moins d'une myriade de grains de sable. Il suppose ensuite que le diamètre de cette graine de pavot n'est pas plus petit que la quarantième partie d'un doigt.

Si V(graine de pavot) < 1 M,
comme $\varnothing$(graine) < $\varnothing$(doigt)/40,
alors V(doigt) < 40^3 M.

Ainsi, V(doigt) < 64 000 M, ou encore 6 MM et 4 M et donc en considérant la dizaine la plus proche, on obtient V(doigt) < 10 MM.

Puis il passe d'un diamètre d'un doigt à un diamètre de 100 doigts. Le volume correspondant est multiplié par $100^3 = 10^6 = 100$ M (rappelons que lorsque les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3). On passe donc d'une étape à la suivante en multipliant les diamètres par cent et les volumes par 100 M (dans la notation d'Archimède, cela consiste à ajouter 2 zéros et une myriade).

Par exemple, pour passer de l'étape 2 à l'étape 3 :

$$10M\ N3 \rightarrow 1000\ MM\ N3 \rightarrow 1000\ N4$$

Pour passer de l'étape 3 à l'étape 4 :

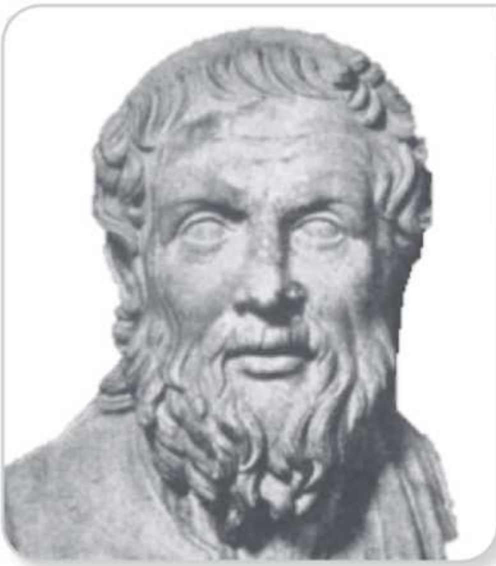
$$1000\ N4 \rightarrow 100000\ M\ N4 \rightarrow 10\ MM\ N4 \rightarrow 10\ N5$$

Étape	Diamètre	Nombre de grains de sable (notation Archimède)
0	1 doigt	10 N2
1	100 doigts	1000 M N2
2	1 stade	10 M N3
3	100 stades	1000 N4
4	1 MS	10 N5
5	100 MS	1000 M N5
6	1 MMS	10M N6
7	100 MMS (diamètre de l'univers géocentrique)	1000 N7
8	1 MMMS	10 N8
9	100 MMMS (diamètre de l'univers héliocentrique)	1000 M N8

Archimède en conclut donc que la quantité de sable de grandeur égale à l'Univers (version Aristarque) est inférieure à :
$1000\ M\ N8 = 10^3 \times 10^4 \times 10^{8x7} = 10^{63}$.

Chapitre 15.

Apollonius « le Méticuleux »

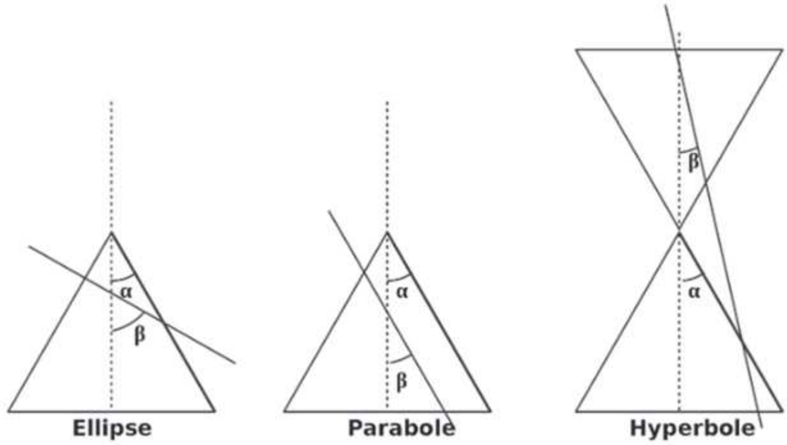


262-190 av. J.-C.

C'est un mathématicien et astronome grec, originaire de Perge, installé à Alexandrie.

Il a beaucoup travaillé sur les coniques en particulier. Son traité est composé de 8 livres (le 8e a été perdu) dans lesquels il définit et étudie les ellipses, paraboles et hyperboles, qui sont les courbes déterminées par les sections d'un cône avec un plan :

Pour une ellipse, l'angle d'inclinaison du plan de coupe avec l'axe du cône (β) est supérieur à l'angle d'ouverture du cône(α) : β > α.
Pour une parabole, β = α.
Pour une hyperbole, β < α.



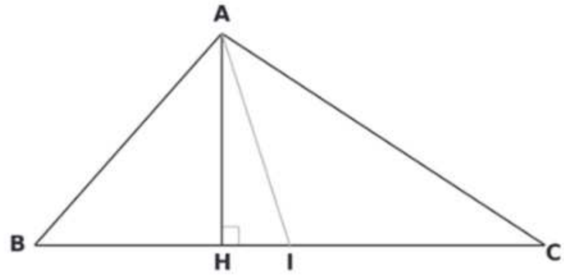
On peut noter que si $\beta = 90°$, alors la section est un cercle.

Théorème d'Apollonius (= théorème de la médiane)

Si I est le milieu de [BC], alors $AB^2 + AC^2 = 2\,(BI^2 + IA^2)$.
En effet, d'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABH :
$AB^2 = AH^2 + HB^2$.
Dans le triangle ACH : $AC^2 = AH^2 + HC^2$ et dans le triangle AIH :
$IA^2 = AH^2 + IH^2$ ou $AH^2 = IA^2 - IH^2$. **(1)**

Par suite $AB^2 + AC^2 = AH^2 + HB^2 + AH^2 + HC^2 = HB^2 + HC^2 + 2\,AH^2$.
Or $HB^2 = (IB - IH)^2 = IB^2 + IH^2 - 2\,IB \times IH$,
$HC^2 = (IC + IH)^2 = IC^2 + IH^2 + 2\,IH \times IC$
et $AH^2 = AI^2 - HI^2$ (cf. **(1)**).

Donc $AB^2 + AC^2 = IB^2 + IH^2 - 2\,IB \times IH + IC^2 + IH^2 + 2\,IH \times IC + 2\,(IA^2 - IH^2)$
ou $AB^2 + AC^2 = 2\,IH^2 + IB^2 + IC^2 + 2\,IA^2 - 2HI^2 + 2\,IH\,(IB - IC)$.
Or $IB = IC$ donc $AB^2 + AC^2 = 2\,IB^2 + 2\,IA^2 = 2\,(IB^2 + IA^2)$.



En astronomie, il développe une théorie des épicycles et des excentriques, qui sera reprise et améliorée par Hipparque (→ chapitre 16).

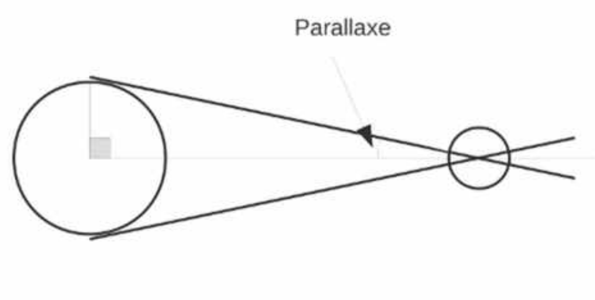
Chapitre 16.

Hipparque « le Rigoureux »

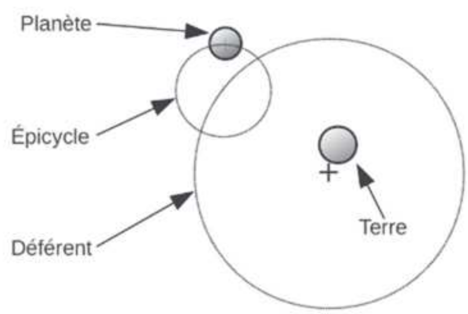
180-125 av. J.-C.

Originaire de Nicée, Hipparque passe une première période à Rhodes, puis il s'installe à Alexandrie. Grâce à la rigueur de ses méthodes, en utilisant des instruments performants (Astrolabe) et en innovant par la création de tables de cordes, il fait des mesures astrales précises et est à l'origine de la trigonométrie. Ses travaux seront grandement repris par Ptolémée (→ chapitre 17).

- Il emprunte aux Babyloniens le partage du cercle en 360 parties.
- Il mesure la longueur d'une année avec un erreur de seulement 6 minutes.
- Il propose un catalogue de 850 étoiles.
- Il améliore la connaissance de la distance Terre-Lune.
- Il découvre la précession des équinoxes, c'est-à-dire le changement de direction de l'axe de rotation de la Terre et les irrégularités des mouvements de la lune.
- Il détermine des parallaxes :



Reprenant le modèle d'Apollonius, il propose un système du cosmos où chaque planète tourne autour d'un petit cercle, l'épicycle, dont le centre tourne lui-même autour d'un grand cercle, le déférent. Tous ces déférents sont concentriques et leur centre commun est un point proche de la Terre (elle est légèrement excentrée).



Dans l'ordre, il y a :

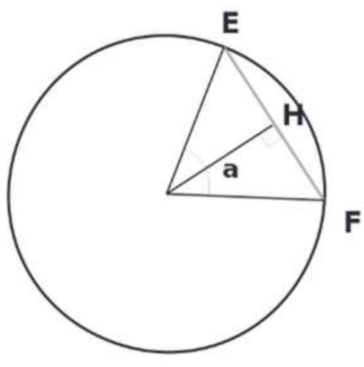
- Terre
- Lune
- Mercure
- Venus
- Soleil
- Mars
- Jupiter
- Saturne

Presque tous les scientifiques dont on parle dans ce livre ont un cratère de la lune à leur nom. Mais celui attribué à Hipparque est notable : c'est dans ce cratère que Tintin alunit dans *On a marché sur la Lune.*

La création de la trigonométrie

Calcul des longueurs de corde : (pour un cercle de rayon 1)

Rappelons qu'une corde est un segment dont les extrémités sont sur le cercle. Pour un angle donné a, il correspond une corde [EF].



	Nombre de côtés	Angle au centre	EF (arrondi)
Triangle équilatéral	3	120°	1,732051
Carré	4	90°	1,414214
Pentagone régulier	5	72°	1,175571
Hexagone régulier	6	60°	1
Octogone régulier	8	45°	0,765367
Décagone régulier	10	36°	0,618034

On détermine ensuite les longueurs de corde pour les autres angles, à l'aide de formules adaptées. Mais pour démontrer certaines formules, on aura besoin d'utiliser un théorème qui apparaît dans le livre I de *l'Almageste* (→ chapitre 17) et qui porte le nom de **Théorème de Ptolémée** :

> « Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, alors le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés :
> $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$ ».

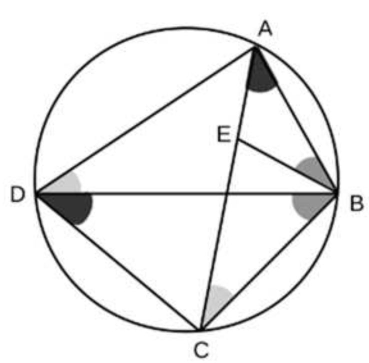
Voici la démonstration :

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ car ils interceptent le même arc.

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ pour la même raison.

Soit $E \in [AC]$ tel que $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$.

On a donc $\widehat{CBE} = \widehat{ABD}$.



Dans le triangle ABD : $\widehat{BAD} = 180° - \left(\widehat{ABD} + \widehat{ADB}\right)$.

Dans le triangle EBC : $\widehat{BEC} = 180° - \left(\widehat{CBE} + \widehat{BCE}\right)$.

Donc $\widehat{BAD} = \widehat{BEC}$.

Les angles des triangles ABD et BCE sont égaux deux à deux, donc les triangles sont semblables.

Par suite $\frac{AB}{BE}=\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{EC}$, donc $EC\times BD=BC\times AD$. **(1)**

Dans le triangle ABE : $\widehat{AEB}=180°-\left(\widehat{ABE}+\widehat{BAE}\right)$.

Dans le triangle BCD : $\widehat{BCD}=180°-\left(\widehat{CBD}+\widehat{BDC}\right)$.

Donc ABE et BCD sont également semblables et $\frac{AB}{BD}=\frac{BE}{BC}=\frac{AE}{CD}$

ainsi $AE\times BD=AB\times CD$.

Or $AC = AE + EC$.

Donc $AC\times BD=AE\times BD+EC\times BD$

et donc $AC\times BD=AB\times CD+BC\times AD$. (Cf. **(1)**)

Longueur des cordes

Pour simplifier, on notera corde (a) la longueur du segment [EF] dans le cercle de rayon 1 :

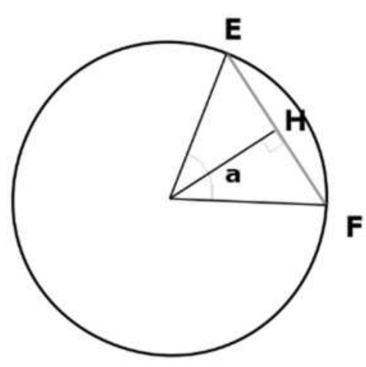
EF = corde (a).

$\sin\frac{a}{2}=HF$.

Donc $EF=2\sin\frac{a}{2}$ et $\text{corde}(a)=2\sin\frac{a}{2}$.

Ainsi corde(2a) = 2 sin a et sachant que cos a = sin (90° – a),

$\cos a=\frac{1}{2}\times\text{corde}(180°-2a)$.



On a donc corde(180° – 2a) = 2 cos a.

On obtient alors les formules suivantes :

1. $\text{corde}(180° - a)^2 = 4 - \text{corde}(a)^2$.

AB = Corde(a) et BD = Corde (180°– a).

ABD est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore :

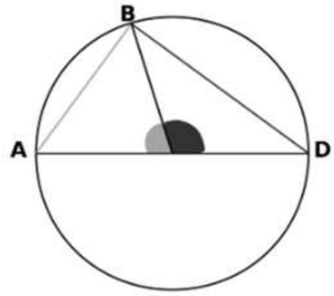
$AB^2 + BD^2 = AD^2$

et donc :

$\text{corde}(a)^2 + \text{corde}(180° - a)^2 = 2^2$.

$\text{corde}(a)^2 + \text{corde}(180° - a)^2 = 4$.

$\text{corde}(180° - a)^2 = 4 - \text{corde}(a)^2$.



Ainsi dans la notation actuelle : ($\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$).

2. $\text{corde}(a - b)$

$$= \frac{\text{corde}(a) \times \text{corde}(180° - b) - \text{corde}(b) \times \text{corde}(180° - a)}{2}.$$

AC = corde(a), AB = corde(b), BC = corde (a – b),

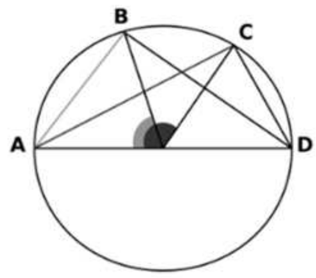
CD = corde (180° – a) et BD = corde (180° – b).

D'après le théorème de Ptolémée, AC × BD = AB × CD + AD × BC.

Donc $BC = \dfrac{AC \times BD - AB \times CD}{AD}$

et donc $\text{corde}(a - b)$

$$= \frac{\text{code}(a) \times \text{corde}(180° - b) - \text{corde}(b) \times \text{corde}(180° - a)}{2}.$$



Dans notre notation moderne,

on écrit sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a.

3. $\text{corde}(a+b)$

$$=\frac{\text{corde}(b)\times\text{corde}(180°-a)+\text{Corde}(a)\times\text{corde}(180°-b)}{2}.$$

AB = corde(a), BC = corde(b) et AC = corde(a + b).

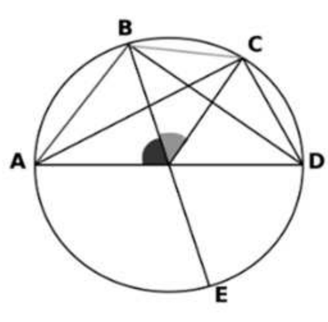
Soit E tel que [BE] est un diamètre du cercle.

BD = corde (180°– a) et CE = corde(180°– b).

Dans ABDE, d'après le théorème de Ptolémée,
AC × BE = BC × AE + BA × CE.

2 × corde(a + b) = corde(b) × AE + Corde(a) × corde(180°– b).

Or ABDE est un rectangle, donc AE = BD = corde(180°– a).



Ce qui donne sin (a + b) = sin a cos b + sin b cos a.

4. 2 corde(2a) = corde(a) × corde (180° – a).

Il suffit de poser a = b dans 3) et donc sin 2a = 2 sin a cos a.

Avec le tableau de départ et les formules trouvées, il est possible de retrouver la longueur des cordes de chaque angle : la formule 1 par exemple permet de se limiter aux angles de 0 à 180°, mais c'est tout de même un travail long, très long, surtout sans calculatrice.

Chapitre 17.

Ptolémée « le Géographe »

Env. 100-168

Son vrai nom est Claudios Ptolemaios et il n'a absolument rien à voir avec les Ptolémée de la dynastie lagide. Il a vécu à Alexandrie. C'est le plus célèbre astronome de l'antiquité. Il est également géographe. On pense qu'il était meilleur astronome que mathématicien, alors que c'est certainement le contraire : pour effectuer ses calculs, il a forcément étudié la géométrie du cercle et a d'ailleurs fait quelques avancées en trigonométrie.

L'œuvre la plus célèbre de Ptolémée est intitulée *Composition mathématique*. Cette œuvre a ensuite été traduite en arabe, sous le nom d'*Almageste (« le plus grand »)*. Il s'agit d'un traité constitué de treize livres, où il rassemble toutes les connaissances astronomiques de son temps. Il a grandement repris les travaux d'Hipparque de Nicée (→ chapitre 16) et cet ouvrage reste la principale source sur les connaissances astronomiques antiques. Il aura une influence considérable et ses travaux ne seront remis en cause qu'au XVIe siècle, avec le système héliocentrique de Copernic :

- **Livres I et II** : postulats sur les fondamentaux de l'astronomie et bases de trigonométrie.
- **Livre III** : le Soleil (année solaire, mouvement).
- **Livres IV à VII** : la Lune (périodes, mouvements, éclipses).

■ **Livre VIII** : catalogue de plus de mille corps célestes (Magnitude, mouvement).

■ **Livres IX à XIII** : les planètes. Ces livres constituent le cœur de l'*Almageste*. Et là, c'est le fruit de ses recherches personnelles.

En mathématiques, Il est le premier à tenter de démontrer le cinquième postulat d'Euclide avec les quatre autres (→ chapitre 11, *Les Éléments*). Ses travaux en trigonométrie sont liés à ceux en astronomie et sont empruntés ici aussi en grande partie à ceux d'Hipparque.

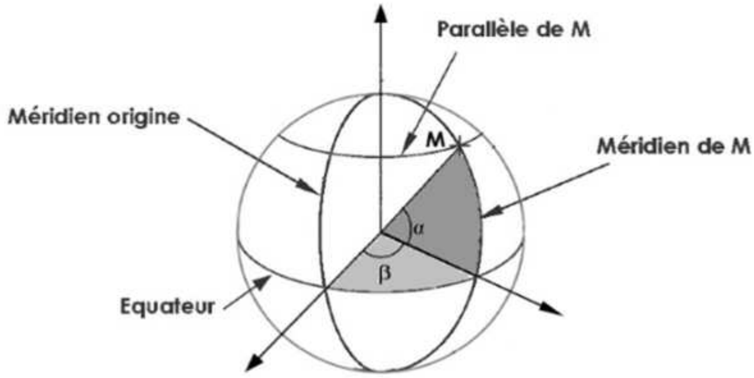
Il publie également un livre d'Astrologie, ***Tetrabiblos***, dans lequel il étudie les effets astrologiques des planètes et qui sera la base de l'astrologie moderne. Dans ***les harmoniques***, il met en relation chiffres, musique, astronomie et harmonie du monde : il reprend ainsi la thèse pythagoricienne sur l'harmonie des sphères. Il a également produit un livre d'optique, où il étudie la réfraction de la lumière. Dans ***les hypothèses des planètes***, il décrit la structure physique du cosmos et détermine le rayon de la sphère des étoiles fixes : 20 000 fois celui de la Terre. Et les *Tables faciles* permet de calculer les positions des planètes, les éclipses, les heures de lever et coucher des astres, sans passer par l'*Almageste*.

En géographie, il dessine une carte du monde et dresse des tables de latitude et longitude de 8000 lieux. Il prédit même qu'au pôle Nord, le jour dure six mois, de même que la nuit et cela en restant à Alexandrie, soit à 6500 km de là ! Mais il évalue la circonférence de la Terre à 180 000 stades, alors qu'Ératosthène avait calculé 252 000 stades. On dit que Christophe Colomb se serait basé sur ses calculs pour entreprendre son voyage qui devait l'emmener en Inde et qui l'a fait accoster en Amérique. Si Christophe Colomb avait pris en considération les calculs d'Ératosthène, peut-être ne serait-il jamais parti ?

Latitude et longitude

Ptolémée donne à la Terre une forme sphérique et estime sa circonférence à 180 000 stades (environ 33 345 km). Pour repérer un point M sur la Terre, on définit ses coordonnées géographiques :

- a : latitude (Nord-Sud, à partir de l'équateur).
- b : longitude (Est-Ouest, à partir d'un méridien origine, à définir).



Malgré les apparences, latitude et longitude ne sont pas identiques : la façon dont on peut les mesurer est très différente.

1. Mesure de la longitude

Reprenant le système d'Hipparque, Ptolémée divise la Terre en 360 méridiens séparés de 500 stades chacun, définissant ainsi le degré de longitude. Il fixe le méridien origine au point le plus à l'ouest connu à son époque, soit les îles « Fortunata » (îles Canaries).
La Terre fait un tour complet en 24 h, soit 60 minutes.
Donc en 1 minute, elle tourne de 0,25°.

Le mouvement apparent du Soleil se fait d'Est en Ouest, donc le mouvement réel de la Terre s'effectue d'Ouest en Est.
S'il est midi solaire au méridien origine, alors que l'heure solaire est de 3 heures 12 minutes après midi au point M, alors la longitude de M sera $0{,}25° \times (3 \times 60 + 12) = 48°$ Est.

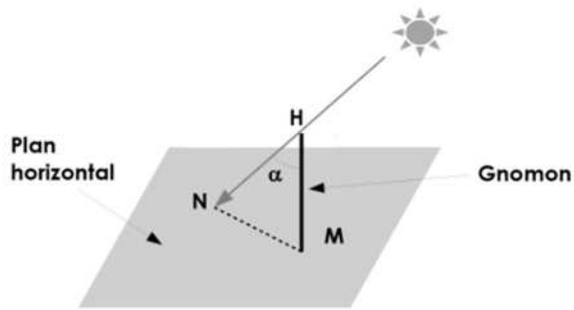
Mais la détermination de la longitude en un point de la Terre nécessite de connaître l'heure au méridien d'origine, ainsi que l'heure au point où l'on se trouve. Au XVIII^e siècle, une horloge à ressort était d'une imprécision allant jusqu'à une heure par jour : le calcul de la longitude n'a donc été que très approximatif.

2. Mesure de la latitude

Cette mesure a d'abord été effectuée à l'aide d'un gnomon (cadran solaire), puis par l'usage d'un astrolabe. Contrairement à la longitude, c'est une mesure qui a pu se faire très tôt, car elle ne dépend pas du déplacement de la Terre.

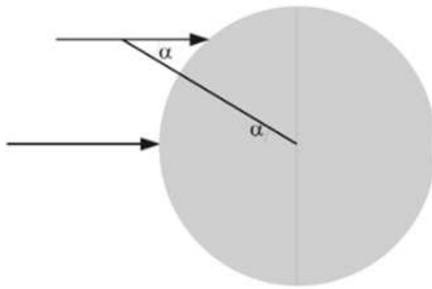
Avec un gnomon

À midi solaire en un point M de la Terre, le soleil est à la verticale de l'équateur (au point de l'équateur de même longitude).



L'angle α dans l'ombre du gnomon (situé au point M) est égal à la latitude.

Le schéma en coupe de la Terre ci-dessous le montre (La distance Terre soleil étant très grande, on suppose les rayons du soleil parallèles).



On retrouve l'angle α comme angle « interne-alterne ».
Il s'agit donc de déterminer l'angle α.
Le triangle NMH est rectangle en M.
On connaît la longueur MH et on peut facilement mesurer la longueur NM.
Donc on peut calculer la tangente de l'angle α :

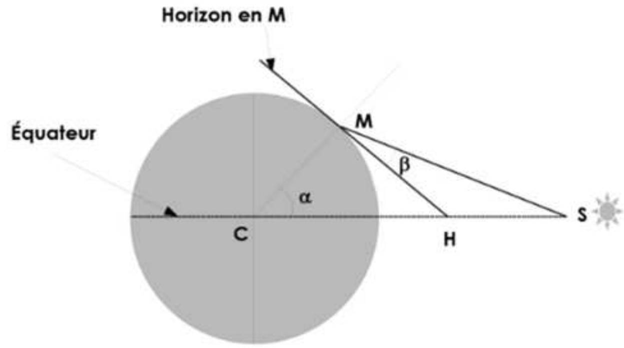
$\tan(\alpha) = \dfrac{NM}{MH}$ et par suite $\alpha = \arctan\left(\dfrac{NM}{MH}\right)$.

C'est le principe qui a été utilisé par Ératosthène, pour mesurer la circonférence de la Terre.

Avec un astrolabe

Il permet de mesurer la hauteur d'un astre S en un point M de la Terre (on appelle cette opération « peser l'astre »). Malgré son nom, cette hauteur est un angle : c'est l'angle β formé par (MS) et l'axe de l'horizon en M.

La figure ci-dessous correspond à la situation à l'équinoxe, à midi solaire.



La connaissance de β (donné par l'astrolabe), L = CS (distance Terre-Soleil que l'on connaît) permettent de déterminer la latitude de M, c'est-à-dire l'angle α.

On admettra la formule suivante : dans le triangle MCS, $\frac{\sin\hat{S}}{MC}=\frac{\sin\hat{M}}{CS}$.

Le triangle CMH est rectangle en M.

Or $\widehat{CSM}+\widehat{CMS}+\widehat{SCM}=180°$

donc $\hat{S}+(\beta+90°)+\alpha=180°$ et donc $\hat{S}=180-\alpha-90-\beta=90-\alpha-\beta$

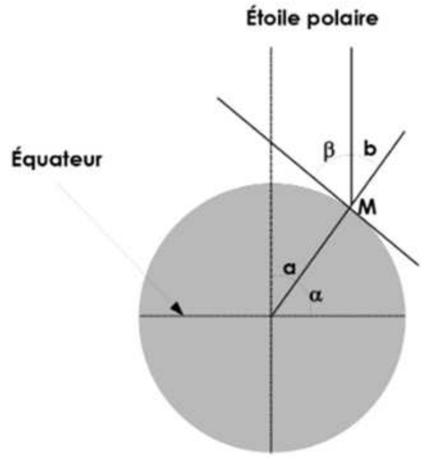
par suite $\frac{\sin(90-\beta-\alpha)}{MC}=\frac{\sin(\beta+90)}{CS}$.

Cela permet de déterminer la latitude α, après avoir mesuré la hauteur β du soleil.

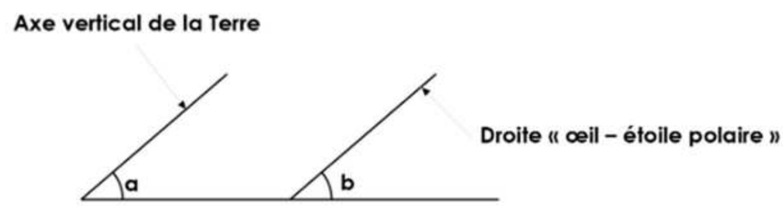
De nuit

Dans l'hémisphère nord, on mesure la hauteur de l'étoile polaire, qui indique le nord, soit donc l'angle β. On pèse donc l'étoile polaire.

La latitude est l'angle α.



Les deux angles a et b sont correspondants :

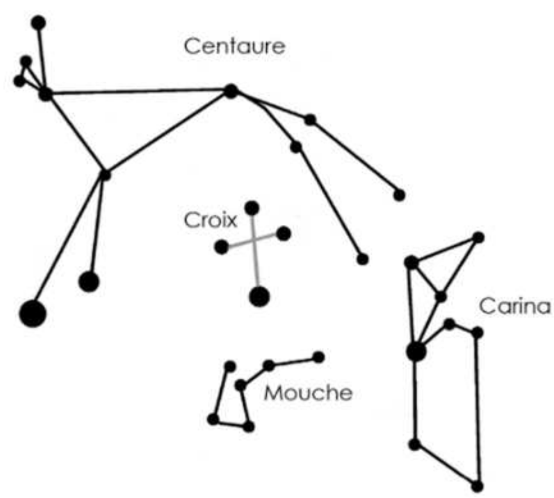


En outre, la droite œil-étoile polaire et l'axe vertical de la Terre sont considérés comme parallèles (Ils ne le sont pas vraiment, mais à l'échelle terrestre l'erreur est si infime qu'on ne la remarque pas).

Nous pouvons donc dire que a = b.
α et a sont complémentaires, donc a = 90° – α.
β et b sont complémentaires, donc b = 90° – β.
Et comme a = b, alors 90 – α = 90 – β et donc $\alpha = \beta$.

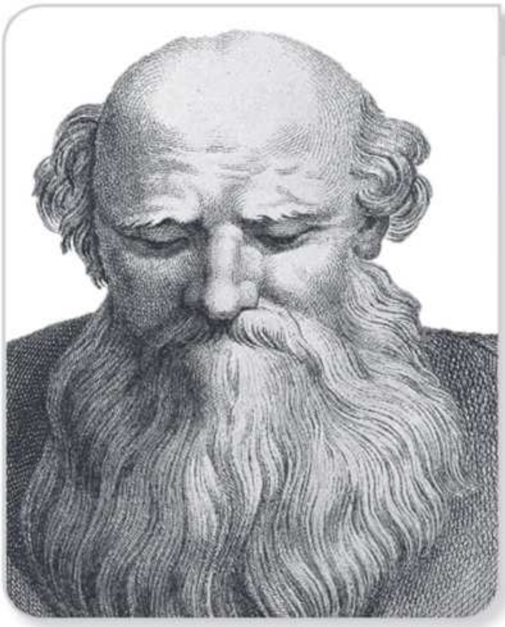
Remarque

Dans l'hémisphère sud, l'étoile polaire n'est pas visible et il n'y a pas d'étoile suffisamment grosse qui indique le pôle Sud : on se sert d'une petite constellation, la croix du sud. Ce qui est nettement moins aisé.



Chapitre 18.

Nicomaque « l'Arithméticien »



Env. 200

Nicomaque est originaire de Gérase, en Judée. C'est un néopythagoricien : il effectue des recherches sur les nombres pour en déceler un caractère métaphysique. Le néopythagorisme est un courant philosophique dérivant de Pythagore, qui a commencé au 1er siècle av. J.-C. Il est à l'origine de la discipline que l'on nomme Arithmétique. Nicomaque a également étudié l'harmonique pythagoricienne. (→ chapitre 5, *Les pythagoriciens et la musique*)

Il définit :

Les **nombres pairs** et les nombres **impairs** et les règles de calcul qui les lient :

- pair + pair = pair pair × pair = pair
- pair + impair = impair pair × impair = pair
- impair + impair = pair impair × impair = impair

Les **nombres premiers** : ce sont des nombres qui ont deux diviseurs et deux seulement : 1 et eux-mêmes (1 n'est pas premier).
Par exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

■ Les **nombres jumeaux** : ce sont les nombres premiers qui ne diffèrent que de 2 (3 et 5, 5 et 7…).

■ Les **nombres composés** : ce sont les nombres qui ne sont pas premiers (sauf 1).
Par exemple 6 = 3 × 2 ou 15 = 5 × 3.

■ Les **nombres parfaits** : ce sont les nombres qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs (autre qu'eux-mêmes).
Par exemple, 6 : les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 (et 6) et 1 + 2 + 3 = 6.
Il a trouvé 3 autres nombres parfaits : 28, 496 et 8118.

Chapitre 19.

Diophante « l'Innovateur »

II ou III^{e} siècle

On ne connaît pas grand-chose de la vie de Diophante. Tout au plus peut-on dire qu'il a vécu entre 150 et 350. On peut cependant connaître l'âge de sa mort, si l'on se fie à cette petite énigme qui serait inscrite sur son tombeau :

« Ici est le tombeau de Diophante Il t'apprend le nombre d'années qu'il a vécu. Sa jeunesse en a occupé la sixième partie. Sa barbe commença à pousser pendant la douzième. Il passa encore le septième de sa vie avant de se marier et, cinq ans plus tard, il eut un fils qui mourut après avoir atteint la moitié de l'âge final de son père. Son père lui survécut quatre années. »

Voici la solution :
Notons x l'âge de Diophante.

$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, soit $\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+5+\frac{42x}{84}+4=\frac{84x}{84}$.

Donc $\frac{(84-14-7-12-42)x}{84}=5+4$, c'est-à-dire $\frac{9x}{84}=9$ soit $x=84$.

Diophante est donc mort à 84 ans. Il s'est marié à 33 ans, a eu un fils à 38 ans. Ce fils a vécu 42 ans.

Il vit à Alexandrie, fréquente la bibliothèque et est à l'arithmétique ce qu'Euclide (→ chapitre 11) est à la géométrie : son livre, *Arithmetica*, comporte 13 tomes (mais seulement 6 nous sont parvenus.) Il a également écrit deux autres livres : *Peri polygonon arithmon,* qui traite des nombres polygonaux et Porismes (ce seraient des corollaires ajoutés aux problèmes résolus dans son grand ouvrage), qui est totalement perdu.

Dans *Arithmetica*, Il ne donne pas de résultats généraux, mais résout une liste de problèmes indépendants. Il s'intéresse aux équations du premier degré à une ou deux inconnues, mais également aux équations du second degré et même du troisième (Une équation du premier degré est une équation où l'inconnue x n'apparaît qu'à la puissance 1 ; dans une équation du second degré, x apparaît à la puissance 2 et dans une équation du troisième degré, x apparaît à la puissance 3). Son apport principal est d'avoir eu recours à des lettres pour symboliser les nombres cherchés et aussi à des symboles pour les opérations :

- x se note ς
- x^2 se note $\Delta\gamma$
- x^3 se note $k\gamma$
- et M représente un nombre sans inconnue.

Par exemple : x^2+2x+3 se note $\Delta\gamma\,\alpha\,\varsigma\,\beta\,M\gamma$ $(x^2\times1+x\times2+x^0\times3)$.
($\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$).

L'utilisation des puissances 3 indique qu'il ne fait plus du tout référence à la géométrie pour envisager des calculs, contrairement à ses prédécesseurs. Il utilise également le symbolisme et pose ainsi les fondements de l'algèbre. Al-Khwarizmi (780-850) perfectionnera ce procédé, dans son livre *Hisab al-jabr w'al-muqabala* (Calcul par restauration et réduction). Al-jabr, qui signifie l'opération, donnera naissance au mot « Algèbre ». Toutefois il faut préciser qu'il n'a pas pu s'inspirer de Diophante : *Arithmética* ne sera traduit en arabe qu'après la mort d'Al-Khwarizmi (→ chapitre 24).

Au XVIIe siècle, **Pierre de Fermat (1601-1665)**, amateur très éclairé de Mathématiques, possède un exemplaire du livre II de l'*arithmétique* de Diophante. Dans la marge du problème 8, diviser un carré en deux carrés, il écrit :

> « Diviser un cube en deux cubes, une puissance 4 en deux puissances 4 ou une puissance quelconque en deux puissances de même dénomination, est impossible. J'ai trouvé une démonstration de cette proposition, mais je ne peux l'écrire dans cette marge car elle est trop longue. »

En traduction, cela dit la chose suivante : Le problème 8 de Diophante consiste à trouver les triplets pythagoriciens, c'est-à-dire les nombres entiers qui vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. Le plus célèbre d'entre eux est le triplet (3, 4, 5). Fermat affirme qu'il n'y a pas de triplet pour les autres puissances, soit donc que l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'a pas de solution entière pour $n \geq 3$. Depuis, beaucoup de mathématiciens se sont escrimés à démontrer cette conjecture. Il faudra attendre 1993, avec Andrew Wiles, pour que cette conjecture puisse enfin porter le nom de Grand théorème de Fermat. Mais vu les outils mathématiques utilisés pour faire cette démonstration, il est fort probable que la démonstration imaginée par Fermat soit fausse.

Chapitre 20.

Pappus « le Perfectionniste »

IVe siècle

Pappus est enseignant à Alexandrie. Il a beaucoup de disciples et relance la dynamique des mathématiques. Il écrit un livre, *Collections mathématiques*, qui est une sorte de synthèse des connaissances accumulées, comme Euclide avant lui. Il y simplifie des démonstrations et précise certaines propriétés.

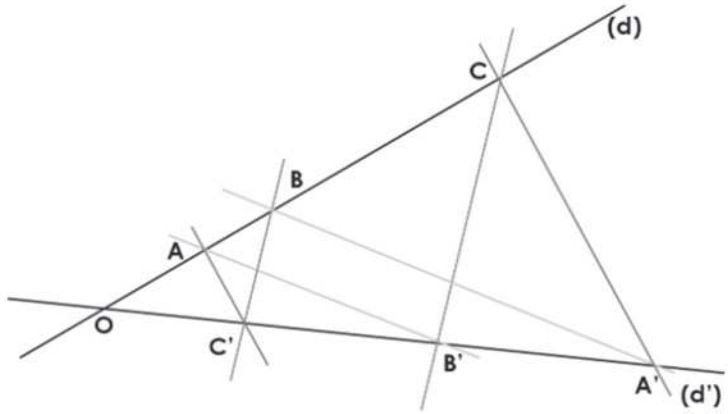
- Le **livre I** et une partie du **livre II** sont perdus.
- **Livre III** : Théorie des proportions
- **Livre IV** : Généralisation des théorèmes, en particulier celui de Pythagore. Étude de la spirale d'Archimède
- **Livre V** : Pappus démontre qu'à périmètre égal, plus un polygone a de côtés, plus son aire est grande.
- **Livre VI** : Optique
- **Livre VII** : Coniques
- **Livre VIII** : Mécanique

Théorème de Pappus

Soient (d) et (d') deux droites distinctes et sécantes.

Soient A, B et C trois points de (d) n'appartenant pas à (d').

Soient A', B' et C' trois points de (d') n'appartenant pas à (d).



Si (AB')//(A'B) et si (BC')//(B'C) alors (AC')//(A'C).

(AB')//(BA') donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{OA}{OB}=\frac{OB'}{OA'}$.

(BC')//(CB') donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{OB}{OC}=\frac{OC'}{OB'}$.

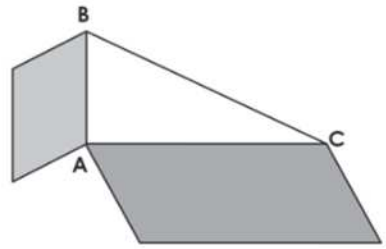
En multipliant deux à deux les membres des égalités :

$\frac{OA}{OB}\times\frac{OB}{OC}=\frac{OB'}{OA'}\times\frac{OC'}{OB'}$ ainsi $\frac{OA}{OC}=\frac{OC'}{OA'}$.

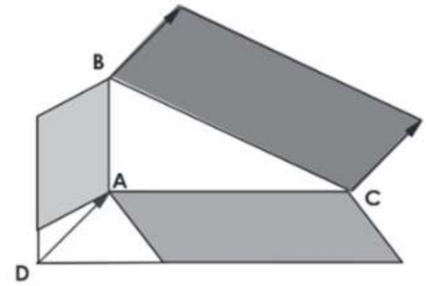
Par suite, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (AC')//(A'C).

La généralisation du théorème de Pythagore

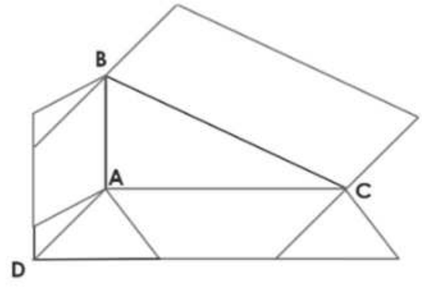
Sur les deux côtés adjacents à l'angle droit d'un triangle rectangle, on trace deux parallélogrammes quelconques :



On prolonge ensuite les côtés des parallélogrammes opposés aux côtés du triangle. Ils sont sécants en D. On trace ensuite l'image de [BC] par la translation qui envoie D en A.



On fait ensuite le découpage indiqué sur la figure suivante :



Le parallélogramme BADL a pour aire AD × h.
où h est la hauteur du parallélogramme relativement à sa base [AD].
Et le parallélogramme BEFH a pour aire EF × h, car la hauteur de BEFH relativement à sa base [EF] est la même que celle de BADL relativement à sa base [AD].

Chapitre 21.

Hypatie « la Martyre »

370-415

Hypatie est la fille de Théon d'Alexandrie (335-405), mathématicien, astronome et directeur du Musée d'Alexandrie. Elle suit l'exemple de son père et devient elle-même professeur : elle enseigne mathématiques et philosophie. Vers l'an 400, elle devient elle-même la directrice de l'école. Côté travaux, on lui attribue trois livres, mais ils ont été perdus : ce sont des commentaires du ***traité des coniques*** d'Apollonius (→ chapitre 15), des tables de Ptolémée (→ chapitre 17), dans l'***Almageste*** et de l'***Arithmétique*** de Diophante (→ chapitre19). Elle aurait également conçu un astrolabe, ancêtre du sextant (instruments qui servent à mesurer la latitude). En 391, l'évêque Théophile fait détruire le Sérapéum, grand temple païen abritant une partie de la bibliothèque d'Alexandrie (→ carte chapitre 11, *La bibliothèque d'Alexandrie*). Il est possible que, souhaitant préserver ce qu'il reste de la bibliothèque, Théon et sa fille se soient concentrés sur la préservation des livres plutôt que sur la création de nouveaux traités.

Hypatie est décrite comme une femme belle et gracieuse. On vantait son éloquence. En tant que professeur, elle avait beaucoup de succès, on accourait en foule pour l'écouter. Elle n'avait aucun souci pour parler devant une assemblée d'hommes et gagnait le respect de tout le monde. Résolue à rester indépendante, elle résistait à toute séduction. Parmi ses étudiants, on peut compter Synésius de Cyrène, qui deviendra évêque de Ptolémaïs en 410. Il a d'ailleurs une correspondance avec elle et sept lettres adressées par lui à Hypatie ont survécu. Il parle d'elle dans quatre autres lettres et on peut y lire ces mots :

> « Ma bienfaitrice, mon maître, ma sœur, ma mère ! »

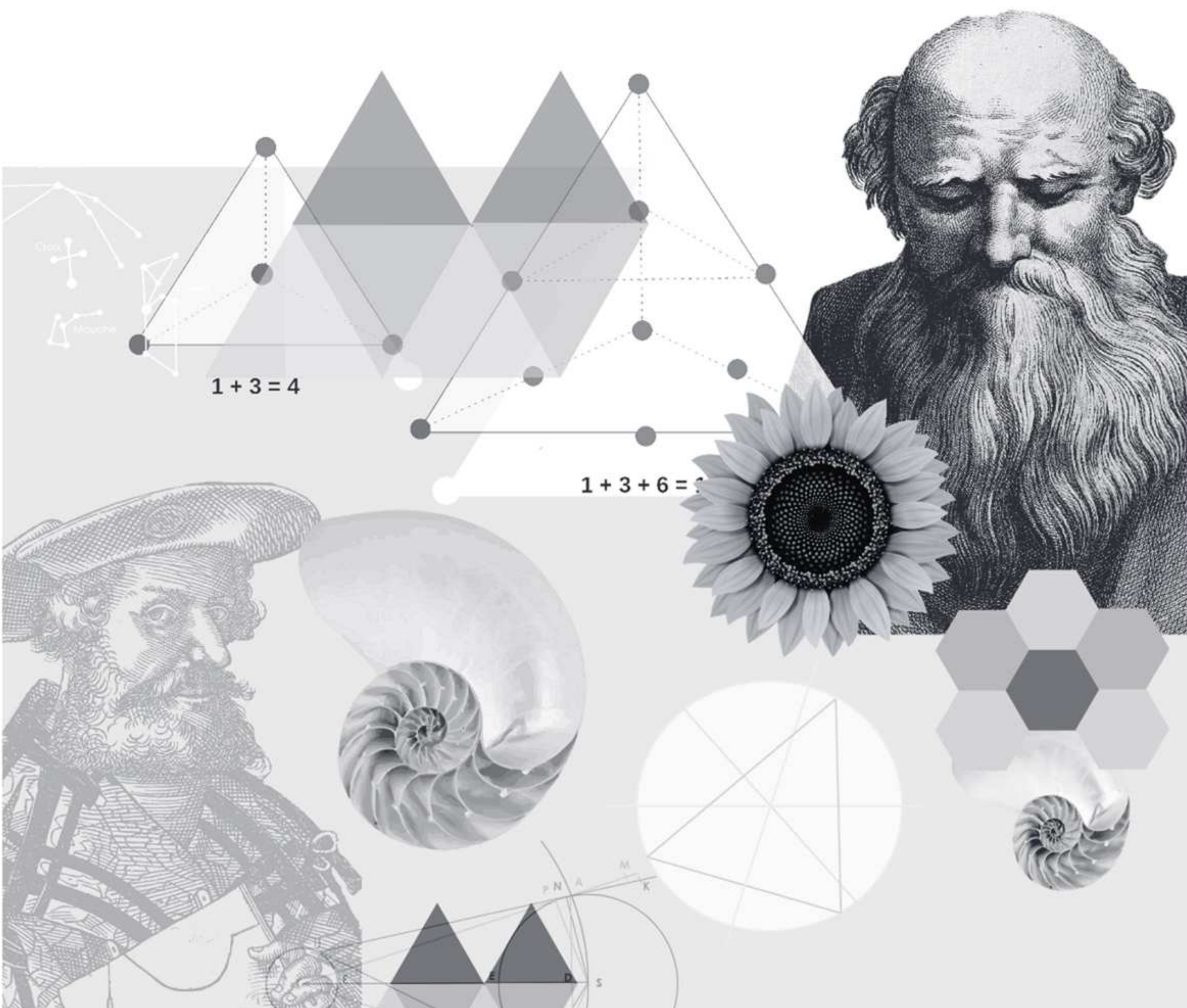
En 412, Cyrille, le neveu de l'évêque Théophile (cité plus haut), devient à son tour évêque de la ville. Il est en conflit avec Oreste, le préfet représentant le pouvoir romain. Tous deux s'affrontent indirectement et la discorde entre eux est de plus en plus ouverte : les juifs, qui soutiennent Oreste, sont persécutés et bannis d'Alexandrie ; une émeute éclate en ville et les parabalanis, un groupe de chrétiens fanatisés à la solde de Cyrille, tentent de tuer Oreste. Celui-ci fait arrêter Ammonius, le moine qui a provoqué l'émeute et le met à mort. La situation devient explosive et une demande de médiation est envoyée, par les deux partis, à l'empereur romain Théodose II. Hypatie est une amie proche d'Oreste, il lui demande souvent d'intervenir pour calmer la situation. Mais Cyrille éprouve de la méfiance envers elle. Elle côtoyait les personnes influentes d'Alexandrie et il redoutait certainement qu'elle finisse par faire pencher l'empereur du côté d'Oreste. Cyrille et ses alliés tentent de la discréditer et de salir sa réputation. On l'accuse d'empêcher la réconciliation entre Oreste et Cyrille, on lui prête en particulier des pratiques sataniques. En 415, elle est attaquée par les parabalanis, alors qu'elle rentrait chez elle. Ils la traînent jusqu'à une église voisine, la déshabillent de force, puis la lapident. Son corps est ensuite découpé, ses membres sont traînés à travers la ville puis brûlés.

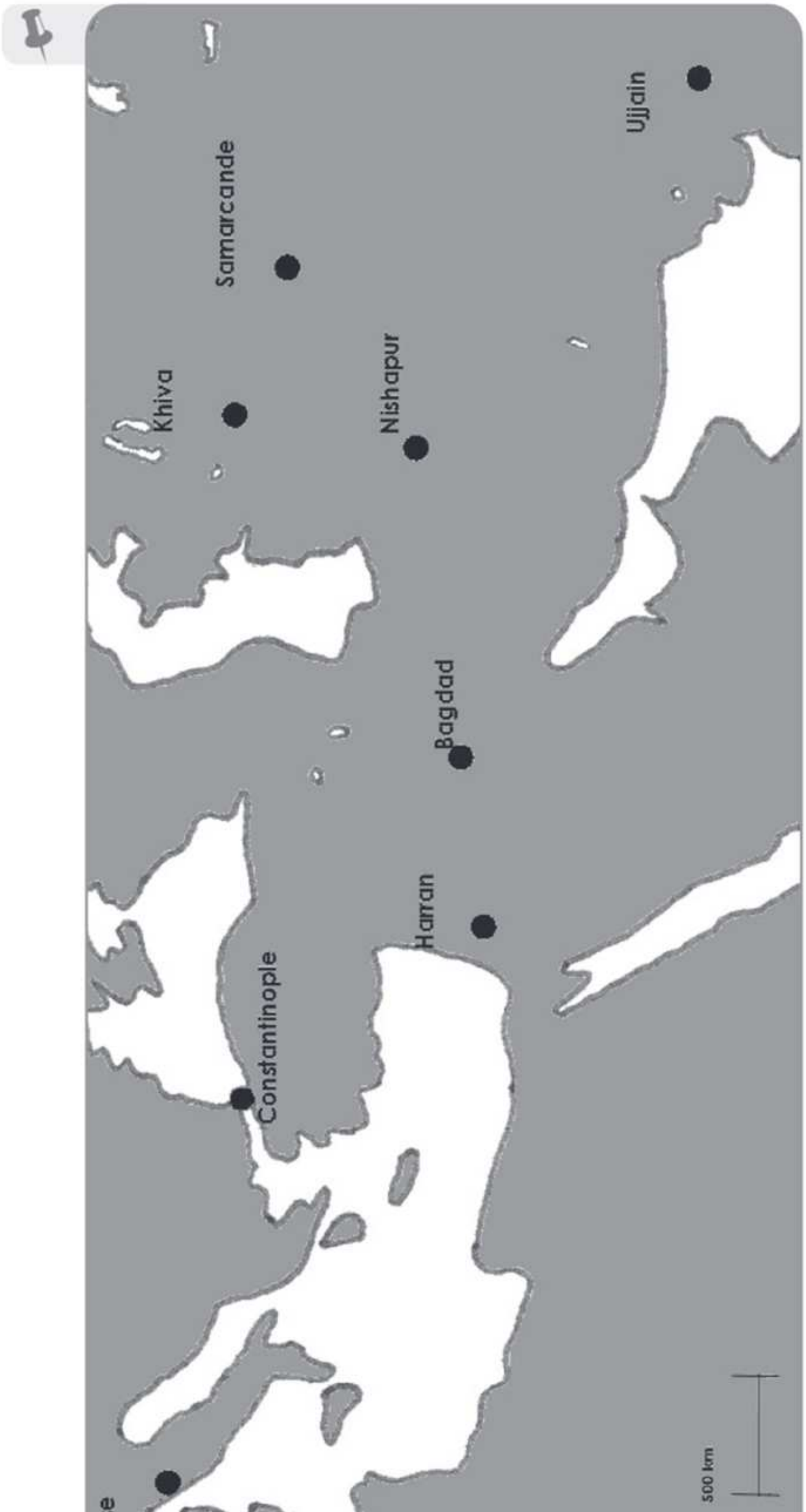
La mort violente d'Hypatie menace toutes les valeurs et les idéaux qu'elle défendait. Hypatie devient ainsi une « martyre de la philosophie » et son meurtre voit la fin d'Alexandrie, en tant que berceau des connaissances grecques.

Ironie du sort : l'assassinat d'Hypatie ressemble à ceux des martyrs chrétiens. D'autres aspects de sa vie, notamment sa virginité, correspondent aussi à l'idéal chrétien. Au Moyen Âge, son histoire inspire la légende de Catherine d'Alexandrie, une martyre vierge décrite comme d'une grande sagesse et très savante. L'une des histoires de cette sainte raconte qu'elle est confrontée à cinquante philosophes païens qui essayent de la convertir, mais que, par son éloquence, elle arrive à tous les convertir au christianisme.

Partie 2.

Les mathématiciens du Moyen Âge

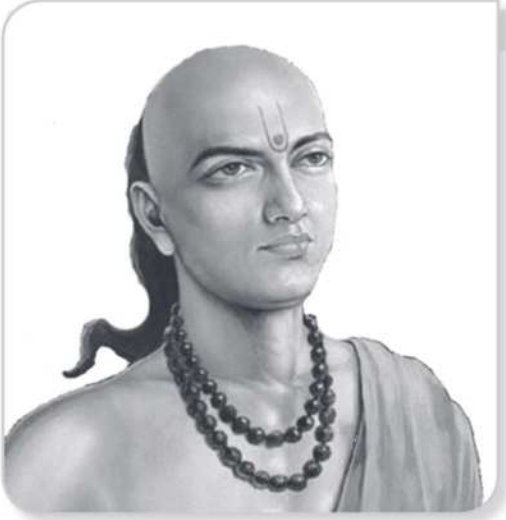




Ujjain
Samarcande
Khiva
Nishapur
Bagdad
Harran
Constantinople
Pise
500 km

Chapitre 22.

Aryabhata « le Premier »



476-550

C'est un mathématicien et un astronome très fécond. Il est l'auteur du premier livre indien qui traite d'astronomie.

Avec lui, on a un résumé des principales connaissances indiennes au VIe siècle :

- règles pour calculer les racines carrées et cubiques ;
- éléments et formules de géométrie (triangle, cercle…) ;
- problèmes d'intérêts composés (progression géométrique) ;
- identités algébriques ;
- fonctions sinus et cosinus ;
- approximation de $\pi \approx \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$.

Pour effectuer ses calculs, il utilisait déjà la numération de position et le zéro, c'est-à-dire l'écriture des nombres telle qu'on la connaît aujourd'hui, mais on peut se douter qu'il n'est pas réellement le premier.

L'extraction d'une racine carrée

Exemple : On cherche la racine carrée de 24368. On groupe les chiffres 2 par 2 de la droite vers la gauche. On prend le premier groupe à gauche et on cherche le plus grand carré qui soit inférieur à ce nombre. Ici, le premier groupe est 2, le plus grand carré est 1, soit 1^2. On place le 1, on soustrait 1 et on abaisse le groupe suivant, à savoir 43.

```
                Car 1² = 1 < 2 et 2² = 4 > 2
 2 43 68 | 1
- 1      |__________
   1 43  |
```

On multiplie par 2 : $1 \times 2 = 2$ donc on écrit 2 et on cherche un chiffre n tel que $\overline{2n} \times n \leqslant 143$.

Ici, $25 \times 5 = 125$. On monte le 5 et on fait la soustraction.

```
  2 43 68 | 1 5
- 1       |__________
  1 43    | 2 5 x 5 = 125
- 1 25    |
    18    |
```

Ensuite, on abaisse 68 et on multiplie de nouveau par 2 : $15 \times 2 = 30$ donc on écrit 30 et on cherche un chiffre n tel que $\overline{30n} \times n \leqslant 1868$, soit donc 6.

On monte ce 6 et on fait la soustraction.

```
  2 43 68 | 1 5 6
- 1       |__________
  1 43    | 2 5 x 5 = 125
- 1 25    | 3 0 6 x 6 = 1836
    18 68 |
  - 18 36
       32
```

Comme on obtient 32, l'extraction n'est pas terminée : on abaisse deux 0, on place une virgule après le 156 et on recommence :

$156 \times 2 = 312$ donc on cherche un chiffre n tel que $\overline{312n} \times n \leqslant 3200$.

Soit donc 1. On monte ce 1, on fait la soustraction.

On obtient 79, pour continuer on abaisse encore deux 0.

```
  24368  | 156, 1
 - 1     |__________________
   143   | 25 x 5 = 125
  -125   | 306 x 6 = 1836
         | 3121 x 1 = 3121
    1868
   -1836
      3200
     -3121
        7900
```

$1561 \times 2 = 3122$ et on cherche n tel que $\overline{3122n} \times n \leqslant 7900$.

Ici on trouve $n = 0$. On obtient donc $\sqrt{14368} \approx 156{,}1$.

Si on veut plus de décimales, on monte le 0 (de $n = 0$), on abaisse deux 0 et on recommence.

Chapitre 23.

Brahmagupta « le Transmetteur »

598-668

C'est un astronome qui a dirigé l'observatoire astronomique d'Ujjain.

On connaît deux ouvrages de ce mathématicien : *Brahmasphutasiddhânta* et *Khandakhâdyaka*.

Avec Brahmagupta, on a les premiers pas de la numération de position. Le zéro devient un nombre et les négatifs font leur apparition. Son œuvre, traduite en arabe sous le titre *Sindhind*, sera le pont qui permettra aux chiffres indiens et à la numération de position de faire leur entrée dans le monde arabe.

En fait, il considère les nombres en termes de dettes et de bénéfices :

- un nombre positif est un bénéfice,
- un nombre négatif est une dette,
- et zéro est défini comme le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même.

Brahmagupta fixe la règle des signes de la multiplication :

- positif × positif = positif ;
- positif × négatif = négatif ;
- négatif × positif = négatif ;
- négatif × négatif = positif.

En outre, il redonne l'algorithme d'extraction des racines carrées d'Aryabhata et utilise la formule $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$.

En effet :

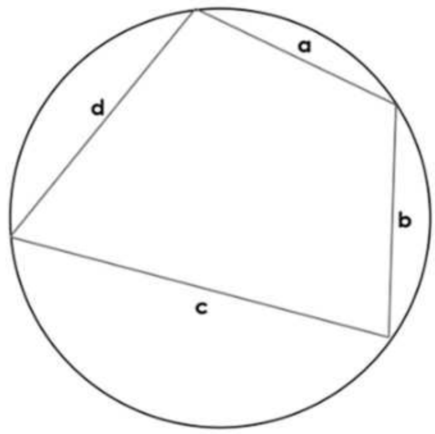
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}=a+b+2\sqrt{ab}.$$

Il utilise aussi $\sum n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(→ chapitre 25, *Somme des carrés et somme des cubes.*)

Il résout des équations du type $ax+c=by$, $ax^2+c=y^2$ et $ax^2-c=y^2$ (pour a, b et c entiers).

En géométrie, il donne la formule de l'aire d'un quadrilatère convexe dont les sommets se trouvent sur un même cercle :



Si a, b, c et d sont les longueurs des côtés et si $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

alors $\text{Aire}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Mais tous ces résultats sont donnés sans démonstration, il est donc impossible de savoir comment il s'y est pris.

Selon certaines traditions indiennes, la numération de position a une origine divine : Brahma, le dieu créateur de l'univers, aurait inventé les 9 chiffres pour aider les hommes à effectuer tous les calculs possibles. Et pour éviter les erreurs dues à une place vide dans l'écriture du nombre, il a marqué ce vide par un symbole qui représente le ciel : un petit rond.

Effectivement, la clé de la numération de position que nous connaissons, c'est la création du chiffre zéro. Dans la numération romaine, pas de zéro : quand il n'y a rien, on ne le compte pas. Mais avec la numération de position, zéro est essentiel : $105 \neq 15$!

On retrouve la trace de zéro dans les travaux de Brahmagupta. Zéro est considéré comme un nombre à part entière et c'est le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même : $5 - 5 = 0$.

On lui associe des règles de calcul :

$$0 + a = a + 0 = a$$
$$0 \times a = a \times 0 = 0$$

Quant à la division par zéro :

$$\frac{a}{0} = \infty$$

$\frac{a}{0} + k = \frac{a}{0}$ et $\frac{a}{0} - k = \frac{a}{0}$ (soit donc $\infty + k = \infty$ et $\infty - k = \infty$).

De ce fait, l'infini est considéré comme étant l'inverse de 0.

À la fin du premier millénaire, les mathématiques indiennes sont très avancées. Mais le pays est très divisé et donc la diffusion de leurs résultats s'est faite dans l'ombre des contributions arabes et grecques qui s'en étaient inspirées. Le plus bel exemple est celui de ce que nous appelons encore aujourd'hui les chiffres arabes, qui sont en fait indiens.

Zéro s'écrivait *Shunya* en sanscrit. Traduit en arabe, il est devenu *sifr*, qui a donné le mot chiffre. Et traduit en latin, il est devenu *zéphirum*, puis *zéphiro* en italien et enfin, zéro.

La légende du jeu d'échecs

Une légende arabe attribue l'invention du jeu d'échecs au sage Sissa, fils du Brahmane Dahir (c'est une sorte de prêtre hindou). Il conçut ce jeu afin d'occuper le fils du roi des Indes, Balhait et aussi pour lui donner une leçon sur le fait que le Roi, pièce importante du jeu, n'est rien sans l'aide de ses sujets.

Le souverain, enthousiaste, demanda à Sissa ce que celui-ci souhaitait en échange de ce cadeau extraordinaire.

Humblement, Sissa répondit :

> « Que l'on mette un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre pour la troisième, huit pour la quatrième et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^{e} case et que le tout additionné me soit remis. »

Le prince accorda immédiatement cette récompense en apparence modeste, mais en y regardant de plus près :

Case 1	1 grain
Case 2	2 grains = 2^1 grains
Case 3	4 grains = 2^2 grains
Case 4	8 grains = 2^3 grains
Case 5	16 grains = 2^4 grains
...	...
Case 64	2^{63} grains

Le roi devrait donc donner à Sissa $T = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 +. + 2^{63}$ grains.

Or $2T = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{64}$.

Donc $2T - T = 2^{64} - 1$ ou encore $T = 2^{64} - 1$.

Ainsi T = 18 446 744 073 709 551 615 grains.

Si on considère que 100 grains pèsent 5 g, alors la masse de riz de Sissa sera de $\dfrac{2^{64}-1}{100} \times 5\text{ g} = \dfrac{2^{64}-1}{100 \times 10^6} \times 5\text{ t} \approx 9 \times 10^{11}$ tonnes.

Sachant que la production mondiale de riz en 2019 était de $516{,}9 \times 10^6$ tonnes, il faudrait verser à Sissa $\dfrac{9 \times 10^{11}}{516{,}9 \times 10^6} \approx 1741$ fois la production mondiale de riz (de 2019).

Chapitre 24.

Al Khwarizmi « l'Algébriste »

788-850

Al-Djafar Muhammad ibn Mussa Al Khwarizmi est originaire de Khiva (Ouzbékistan), mais il est venu à Bagdad, où il a rejoint le groupe de mathématiciens œuvrant à la Maison de la Sagesse, fondée par le calife Al Mamun.

Cinq de ses ouvrages nous sont parvenus. Il y traite de différents domaines comme l'arithmétique, l'astronomie, la géographie ou les calendriers. Son livre ***Kitâb al-jabr wa'l muqqâbala*** (lever le voile sur la science de la transposition et de la réduction) est le premier traité d'algèbre et donnera son nom à la discipline : Al-jabr.

À l'origine, le calife lui avait demandé un traité qui permette de résoudre tous les problèmes de la vie courante. Vu l'ampleur de la tâche, Al Khwarizmi finit par rassembler ceux qui ont le même type de résolution.

Il les classe en six types :

- les racines sont égales à un nombre : $5x = 3$ par exemple ;
- les carrés sont égaux à un nombre : $5x^2 = 7$ par exemple ;
- les carrés sont égaux aux racines : $3x^2 = 7x$ par exemple ;

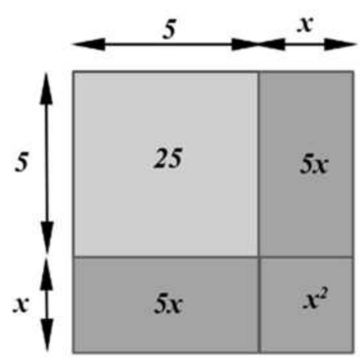
- les carrés plus les racines sont égaux à un nombre : $3x^2 + 5x = 7$ par exemple ;
- les carrés plus un nombre sont égaux aux racines : $3x^2 + 5 = 7x$ par exemple ;
- les racines plus un nombre sont égaux aux carrés : $5x + 15 = 3x^2$ par exemple.

Pour chaque équation, il donne une méthode de résolution, puis la démonstration (géométrique).
Exemple pour $x^2 + 10x = 39$:

- prends la moitié des racines (soit la moitié de 10, donc 5) ;
- multiplie ce nombre par lui-même (25) ;
- ajoute le résultat au nombre (39, soit $25 + 39 = 64$) ;
- prends la racine du résultat ($\sqrt{64} = 8$) ;
- soustrais en la moitié des racines ($8 - 5 = 3$).

Démonstration

On voit que $(x + 5)^2 - 25 = x^2 + 10x$.



Insérer chapitre 14 Im1

L'équation est donc transformée en $(x + 5)^2 - 25 = 39$,
puis $(x + 5)^2 = 39 + 25$ soit donc $(x + 5)^2 = 64$,
ensuite $(x + 5) = 8$ et donc $x = 8 - 5 = 3$.

Soulignons qu'il y a une autre solution à cette équation, à savoir –13, mais même si les nombres négatifs sont acceptés, on s'en débarrasse au plus vite. Donc hors de question de donner un nombre négatif en solution.

Bien évidemment, à l'époque, on n'utilisait pas les lettres symboliques et on écrivait tout en texte (et en chiffres romains). Cela donne une idée du courage qu'il fallait pour entreprendre les résolutions des problèmes.

De nos jours, pour résoudre les équations du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, on se sert de la valeur $\Delta = b^2 - 4ac$ et si $\Delta \geq 0$ alors l'équation a deux solutions réelles, à savoir $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

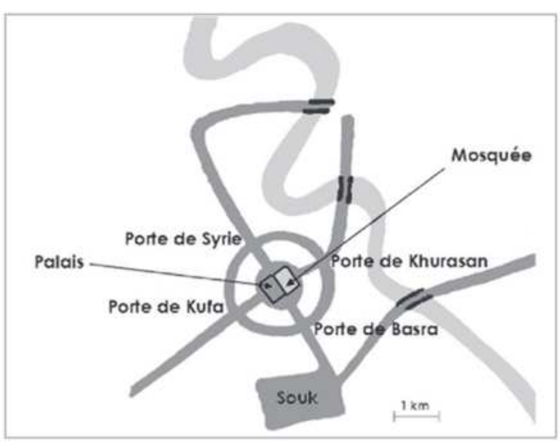
Ces formules seront utiles au chapitre 32, *Les équations du 3e degré.*

Al Khwarizmi est aussi l'auteur d'un livre sur la numération indienne, perdu, ***Kitâb al jâmi' wa'l tafriq bî hisâb al hind*** (Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des indiens). Le livre en question a certainement permis l'essor de la numération de position en occident. Il y décrit cette numération, muni du zéro (c'est-à-dire en fait notre notation actuelle), les méthodes de calculs avec cette numération, ainsi que l'algorithme d'extraction des racines carrées. Notons d'ailleurs que le nom « Al Khwarizmi », sera latinisé en « Algorismi », qui donnera plus tard le mot « Algorisme », puis « Algorithme ».

Il a également écrit un traité d'astronomie, *Sindhind zij*, qui est une synthèse de l'almageste de Ptolémée et des découvertes indiennes.

La maison de la sagesse

Au VIe siècle, Bagdad était une nouvelle ville construite en trois ans à peine. Tout comme Alexandrie, c'était une ville cosmopolite. Mais alors qu'Alexandrie était une ville rectangulaire, Bagdad, elle, avait une forme circulaire. On la surnommait la ville ronde. Au centre, la mosquée et le palais du calife, d'où partaient quatre grandes rues, dans les quatre directions. Ces quatre rues menaient à quatre portes, les seules qui permettaient d'entrer dans la cité.



Dans le quartier d'Al-Karkh et plus précisément dans le souk, il y avait le plus grand marché aux livres. Ils venaient de partout : Byzance, Pergame, Alexandrie, Syracuse...

Alexandrie possédait le muséum et la grande bibliothèque, Bagdad avait sa bibliothèque et sa maison de la sagesse (Bayt al Hikma). C'est sous le règne d'Haroun al-Rachid que cette institution vit le jour, mais c'est avec son fils, le calife Al-Mamun, que la maison de la sagesse prend son essor, lorsqu'elle ouvre ses portes aux savants : parmi eux, Al Khwarizmi (→ chapitre 24), al Kindi (« le philosophe des arabes »), Thâbit ibn Qurra (→ chapitre 25).

Contrairement aux pensionnaires de la bibliothèque d'Alexandrie, qui se servaient de papyrus pour leurs écrits, ceux de la Maison de la sagesse écrivaient sur du papier. C'est un matériau originaire de Chine. On broyait des fibres végétales (lin, bambou, mûrier...) qui étaient ensuite diluées dans de l'eau. On obtenait ainsi de la pâte à papier très liquide, que l'on étalait sur une toile, qui laissait s'égoutter l'eau. On obtenait alors une feuille de papier, que l'on pressait pour la rendre plus fine, puis on laissait sécher la feuille dans un grenier.

En 751, Les Arabes envahissent Talas (dans le Kirghizistan, à 700 km au Nord-Est de Samarcande). La ville dispose de fabriques de papier et le secret est donc transmis aux Arabes. Ils améliorent le processus de fabrication, qui finira par supplanter totalement le papyrus (et le parchemin).

Les livres qui arrivaient à Bagdad n'étaient pas écrits en arabe, il a fallu les traduire : entreprise extraordinaire que la traduction de tous les livres de grands savants tels qu'Aristote, Archimède, ou Ptolémée. Les bibliothèques privées prolifèrent. La plus prestigieuse était celle d'Al Kindi et à sa mort, on se la disputa. Finalement ce furent les frères Bânû Mûsâ (Mohamed, Ahmed et Hassan), les premiers géomètres arabes, qui finirent par se l'approprier.

Al-Mamun fut l'âme de la maison de la Sagesse : c'était un calife adepte d'Aristote. Il haïssait les intégristes et les pourchassa tout au long de son règne. Après sa victoire sur les Byzantins, il proposa cet échange : les prisonniers contre des livres. Les prisonniers retournèrent à Constantinople, tandis que des ouvrages rarissimes rejoignaient la bibliothèque de la maison de la Sagesse.

Chapitre 25.

Thabit Ibn Qurra « le Traducteur »

826-901

Thabit Ibn Qurra ben Marwan est mathématicien, astronome, linguiste, médecin, philosophe. Il est originaire de Harran, en Mésopotamie. Il est adepte des sabéens, secte inspirée des pythagoriciens, adoratrice des étoiles. De ce fait, beaucoup de ses adeptes étudiaient l'astronomie. Il croise un jour la route d'un des frères Banu Musa (→ chapitre 24), qui, impressionné par les talents du jeune homme, lui propose de venir à Bagdad. Il y étudie les mathématiques et la médecine. Il sait parler le grec, l'arabe et le syriaque. Il dirige une école de traducteurs à Bagdad. Ses talents le conduisent à traduire et commenter *Les Éléments* d'Euclide (→ chapitre 11), ***La sphère et le cylindre*** d'Archimède (→ chapitre 14), ***Les coniques*** d'Apollonius (→ chapitre 15). Mais ce n'est pas seulement un traducteur : il écrit plus de 150 ouvrages scientifiques en arabe et en syriaque. De retour à Harran, il est accusé d'hérésie et donc retourne à Bagdad, où il sera astronome à la cour du calife Al-mu'tadid.
En mathématiques, il étudie notamment les nombres parfaits et les nombres amicaux.

Nombres parfaits

Ce sont les nombres qui sont la somme de leurs diviseurs.
Par exemple 6 : il a pour diviseurs 1, 2, 3 (et 6) et $1 + 2 + 3 = 6$.
Donc 6 est un nombre parfait.

Lorsque cette somme est supérieure au nombre, on dit que le nombre est abondant (par exemple 24) et lorsqu'elle est inférieure, on dit que le nombre est déficient (par exemple 21).

Nombres amicaux

Deux nombres sont amicaux (ou amiables) si la somme des diviseurs de l'un (autre que lui-même) est égal à l'autre.

Par exemple, 220 et 284 :

- les diviseurs de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 24, 55, 110 (et 220) :
$$1+2+4+5+10+11+20+22+24+55+110=284\ ;$$
- les diviseurs de 284 sont 1, 2, 4, 71, 142 (et 284) :
$$1+2+4+71+142=220.$$

Si a, b et c sont des nombres premiers et si $a=3\times 2^{n}-1$, $b=3\times 2^{n-1}-1$ et $c=9\times 2^{2n-1}-1$ alors $2^{n}ab$ et $2^{n}c$ sont amicaux.

Par exemple, 220 et 284 (pour n = 2) ou 18 416 et 17 296 (pour n = 4) (Retrouvés par Fermat, cf. chapitre 19). Descartes (→ chapitre 7, *Les solides de Platon*) donnera 9 363 584 et 9 437 056 (pour n = 7).

Somme des entiers

L'école de Bagdad mit au point certaines jolies formules qui concernent les nombres entiers :

Somme des nombres entiers

On écrit la somme dans un sens puis dans l'autre et on les additionne, comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) \end{array}$$

Le résultat de cette addition correspond au double de la somme des entiers. Or dans ce résultat, on voit que le terme (n + 1) apparaît n fois, ce qui nous permet donc d'écrire que $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit aisément la somme des nombres pairs et celle des nombres impairs.

On développe l'expression entre crochets :

$$3A=(n+1)\left(n^2+2n+1-\frac{3n}{2}-1\right)=(n+1)\left(n^2+\frac{n}{2}\right).$$

Puis en factorisant par n : $3A=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Par suite $A=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Somme des cubes

La méthode est identique, mais cette fois-ci on passe au degré supérieur :

$(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$. (→ chapitre 30, *Le triangle de Pascal*)

Donc $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$.

Notons $B=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

	2^4-1^4	=	4	x	1^3	+	6	x	1^2	+ 4	x	1	+ 1
	3^4-2^4	=	4	x	2^3	+	6	x	2^2	+ 4	x	2	+ 1
	4^4-3^4	=	4	x	3^3	+	6	x	3^2	+ 4	x	3	+ 1
	...												
+	$(n+1)^4-n^4$	=	4	x	n^3	+	6	x	n^2	+ 4	x	n	+ 1
	$(n+1)^4-1^4$	=	4	x	B	+	6	x	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	+ 4	x	$\frac{n(n+1)}{2}$	+ n

On obtient donc $4B=(n+1)^4-1-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}-n$,

soit $4B=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$.

En factorisant par (n + 1), on obtient :

$$\begin{aligned}4B&=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]\\&=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-(2n+1)\right]\end{aligned}$$

On peut encore factoriser par (2n + 1) dans le crochet :

$$4B=(n+1)\left[(n+1)^3-(2n+1)(n+1)\right].$$

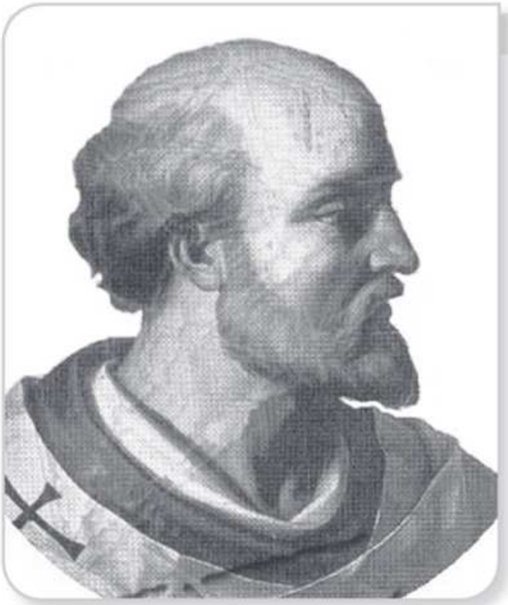
Puis on factorise par (n + 1) : $4B=(n+1)^2\left[(n+1)^2-(2n+1)\right]$.

On développe l'expression entre crochets : $4B=n^2(n+1)^2$.

Par suite $B=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Chapitre 26.

Gerber d'Aurillac « l'Ecclésiastique »



945-1003

Comme son nom l'indique, Gerber est originaire d'Aurillac, en Auvergne. Il étudie le latin, l'histoire et les mathématiques au couvent de Saint Géraud. C'est un personnage qui a soif de savoir. À 18 ans, il part poursuivre ses études en Catalogne, auprès de l'évêque Hatton. Il a l'occasion, dans les abbayes de cette région, de s'initier aux connaissances arabes. Mais ce n'est pas seulement un intellectuel : il construit également des objets à vocation scientifique comme des abaques, un globe terrestre ou des horloges.

Devenu secrétaire de l'évêque, il s'installe à Rome en 965. Il est présenté au Pape Jean XIII et à l'empereur Otton 1er. Il est nommé directeur de l'école diocésaine de Reims, de 972 à 982. Il préconise un enseignement où il privilégie Mathématiques et Astronomie.

Il use de son influence pour permettre à Hugues Capet de monter sur le trône (de France). Malgré plusieurs menaces d'excommunication et une réputation de commerce avec le diable, il devient le Pape Sylvestre II, en 999. Il tente, avec Otton III (empereur germanique), d'instaurer un empire chrétien universel. Sa tentative va échouer mais laissera des traces durables du fait de la christianisation de l'Europe orientale.

Il meurt le 12 mai 1003. Il fut enseveli, à Saint-Jean-de-Latran. On raconte que son tombeau ruisselle extérieurement et inonde le sol du caveau chaque fois qu'un Pape va mourir.

C'est ce Pape mathématicien qui a permis l'introduction des chiffres dits arabes et de la numération décimale en occident. En fait, il introduit principalement la nouvelle graphie des chiffres, mais il garde tout de même l'utilisation de l'abaque, sorte de boulier chinois, dont il simplifie l'utilisation. Mais avec sa réputation douteuse, ces nouveaux chiffres, à la graphie compliquée par rapport aux chiffres romains, prendront du temps avant d'être acceptés. Deux groupes s'affrontent :

- Les abacistes, qui veulent en rester à l'écriture avec les chiffres romains.
- Les algoristes, qui sont partisans de la nouvelle écriture.

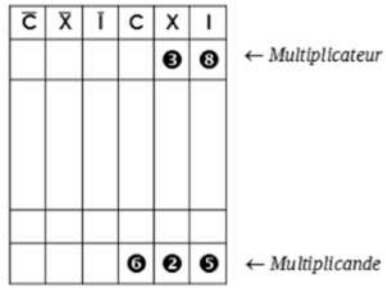
Il faudra tout de même attendre le XVIe siècle avec la diffusion des livres pour voir la nouvelle notation se diffuser. L'utilisation du papier et de l'écriture sonne alors la fin des abaques et la propagation de la nouvelle notation.

L'abaque

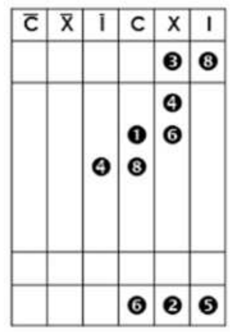
Un abaque est une sorte de plateau séparé en 6 colonnes. On y trouve, de droite à gauche, les unités, les dizaines, les centaines, les unités de mille, les dizaines de mille et les centaines de mille. On plaçait des petits cailloux, des calculi, dans chaque colonne, pour représenter le nombre voulu. Par exemple, on écrivait 4506 de la façon suivante :

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
		•• ••	•• •• •		•• •• ••

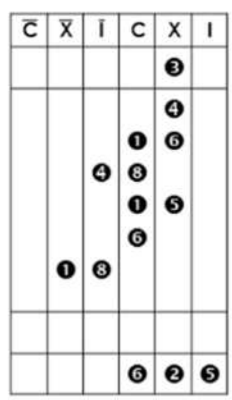
Gerber innova et simplifia l'utilisation de l'abaque en se servant de jetons sur lesquels étaient inscrits les chiffres arabes (sauf le zéro)
Voici un exemple de calcul : 625×38 .



On effectue le calcul $8 \times 5 = 40$ et on place le jeton correspondant. Puis $8 \times 2 = 16$: on insère les jetons en décalant d'une colonne.
Enfin, on multiplie 8 par 6 : $8 \times 6 = 48$.



La multiplication par le 8 étant finie, on l'enlève et on fait les multiplications par 3, en décalant d'un rang :
$3 \times 5 = 153 \times 2 = 6$ et $3 \times 6 = 18$.



On a terminé les multiplications par 3. On enlève le 3 et on effectue les additions des chiffres centraux :
$4 + 6 + 5 = 15$, on place 5 et on ajoute 1 dans la colonne à sa droite.
$1 + 8 + 1 + 6 + 1 = 17$, on place le 7 et sa retenue à droite.
$4 + 8 + 1 = 13$, on place le 3 et sa retenue à droite.
Et enfin $1 + 1 = 2$.

$\overline{\text{C}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{I}}$	C	X	I
	1 1	4 8 1	1 8 1 6 1	4 6 5	
	2	3	7	5	

D'où le résultat : $625 \times 38 = 23750$.

Les systèmes de numération

Dans le système décimal, on utilise 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Les groupements se font par 10 : avec 10 unités, on forme une dizaine ; avec 10 dizaines, on forme une centaine ; etc.

$3247 = 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7$.

$67{,}253 = 6 \times 10 + 7 \times 1 + 2 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}01 + 3 \times 0{,}001$.

C'est le système que l'on utilise habituellement pour compter, mais on peut choisir de se placer dans une autre base, par exemple 5. Dans ce cas, on utilise 5 chiffres : 0, 1, 2, 3 et 4. Les groupements se font par 5 : avec 5 unités, on forme un « groupe 5 » ; avec 5 « groupes 5 », on forme un « groupe 25 » ; etc.

Passage de la base 5 à la base 10

$\overline{1302{,}4}$ (en base 5) correspond à :

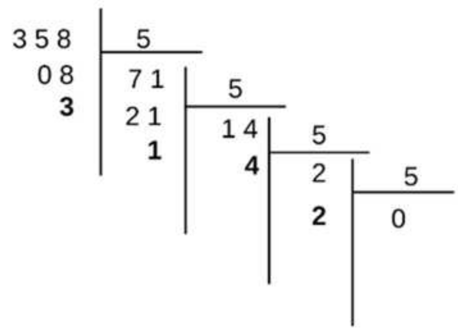
$1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0 + 4 \times 5^{-1} = 1 \times 125 + 3 \times 25 + 2 + \dfrac{4}{5}$

$= 125 + 75 + 2 + 0{,}8$

$= 202{,}8$.

Passage de la base 10 à la base 5

Par exemple, écrivons 358 en base 5 :



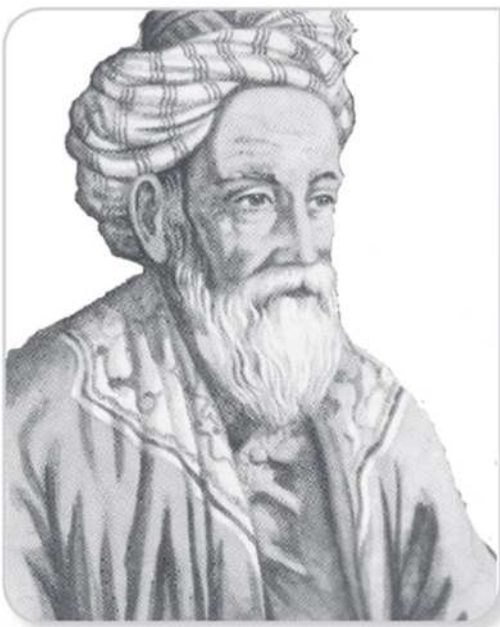
Donc 358 s'écrit $\overline{2413}$ en base 5.

■ Pour les nombres décimaux :
On veut écrire 1,776 en base 5
$0{,}776 \times 5 = 3{,}88$
$0{,}88 \times 5 = 4{,}4$
$0{,}4 \times 5 = 2{,}0$
Donc 2,776 = $\overline{1{,}342}$ (en base 5)

Notons qu'en informatique, deux systèmes de numération sont utilisés : le binaire (base 2) et l'hexadécimal (base 16). Dans ce système, il faut 16 chiffres, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F. Le A vaut 10, le B vaut 11, etc.

Chapitre 27.

Omar Khayyam « le Poète »



1048-1131

Omar Khayyam est né à Nishapur. Al-Khayyam est le nom qu'il choisit de prendre et signifie « celui qui vend des tentes ». En effet, c'était le métier de son père.

On raconte qu'il avait deux amis, Abdoul Kassem et Hassan ibn al Sabbah. Un jour, ils firent le pacte suivant : le premier à faire fortune aiderait les deux autres. Le premier à atteindre la gloire fut Abdoul Kassem. Il était devenu grand vizir, sous le nom de Nizam al Mulk, c'est-à-dire *régulateur du royaume*. Il proposa un poste à Omar, qui refusa : la seule chose qu'il voulait c'était de pouvoir étudier aussi longtemps que possible. Abdoul lui octroya une rente et lui fit construire un observatoire à Ispahan. Hassan, lui, accepta le poste proposé. Mais il se mit à comploter pour prendre la place d'Abdoul. Il fut chassé de la ville et se réfugia dans la montagne, au sud de la mer Caspienne. Il réussit à se rendre maître de la forteresse d'Alamut : Il entra dans la forteresse et s'adressa au commandant de la place : « J'ai là une peau de bœuf, je te donnerai 5000 pièces d'or si tu me vends autant de terrain que ce que l'on peut délimiter avec cette peau ». Le commandant accepta. Hassan découpa alors la peau en fines lanières qu'il lia bout à bout, puis fit le tour de la forteresse avec sa longue lanière. Devenu maître des lieux, Il monta une armée de combattants, auxquels il faisait boire une drogue, le haschich. Les combattants, drogués, prenaient tous les risques, n'avaient peur de rien, pas même de la mort. À cause de la drogue qu'ils prenaient, on les surnomma les hashâshins (qui sera à l'origine du mot « assassins »). Un jour, on retrouva Abdoul Kassem poignardé : le jeune hashâshin envoyé par Hassan fut exécuté. Hassan, lui, mourut à Alamut, qu'il n'avait jamais quitté.

Hassan admirait beaucoup Omar : plusieurs fois, il lui avait proposé de venir à Alamut, où il avait fait construire une bibliothèque extraordinaire. Mais à chaque fois, Omar refusait. Il avait également refusé de se joindre à la cour du sultan Djahal Al-Din Malikshah. Il était devenu un grand astronome et il accepta toutefois de participer à l'élaboration d'un nouveau calendrier, en 1071.

Il est connu pour ses petits poèmes, qu'il écrit tout au long de sa vie. La première traduction de ces poèmes est due à Edward Fitzgerald en 1850. Une des difficultés qu'il a eue fut de faire le tri, car plus de 1000 poèmes étaient attribués à Khayyam. Fitzgerald en retint 170. Ce sont des « rubaiyats », c'est-à-dire des poèmes de quatre vers, des quatrains :

> « Sache qu'il y a deux catégories d'hommes
> Qui vivent au gré de la rotation de ce cercle infini.
> Ceux qui sont informés sur le monde avec son bon et son mauvais côté
> Et ceux qui ne connaissent rien ni d'eux-mêmes ni des choses d'ici-bas ! »

Mais ses poèmes sont jugés antireligieux et il est contraint en 1118 de quitter la cour et d'aller faire un pèlerinage à La Mecque. Après la mort de ses protecteurs, il tombe en disgrâce, les aides financières lui sont retirées et il est contraint de vivre de plus en plus simplement.

En mathématiques, il donne des résolutions géométriques des équations du 3ème et du 4e degré, qu'il a classées. Il commente également les postulats d'Euclide et le livre sur les coniques d'Apollonius (→ chapitres 11 et 15).

Le tout premier calendrier (connu) date de 4300 av. J.-C. environ. Ce calendrier était solaire et se caractérisait par une année de 12 mois de 30 jours plus 5 jours :

$$365 = 12 \times 30 + 5.$$

Mais ces 5 jours supplémentaires sont ajoutés à la fin du 12e mois, ou rassemblés en un mois supplémentaire, puis sont par la suite annulés, ce qui donne lieu à une grande confusion : avec des années de 360 jours, on se retrouvait vite à fêter le printemps en plein hiver.

En 1075, le Sultan Malik Shah décide de réformer le calendrier. Les informations concernant cette réforme nous sont parvenues par les récits d'astronomes d'époques plus tardives. Jusqu'à huit astronomes auraient participé au projet de réforme du calendrier. À part Omar Khayyâm, les autres noms mentionnés sont : Abu-Hâtam Mozaffar Esfazâri, Abd-ol-Rahmân Khâzeni, Meymun ebn-e Najib Vâseti et Abol-Abbas Lukari. Khayyam va fixer la longueur de l'année tropique à 365, 2424. jours et inventer le calendrier Jalali. Il fixe le début de l'année (Nowruz). Ce calendrier deviendra beaucoup plus tard le calendrier actuel de l'Iran.

Point de départ du calendrier

C'est l'Hégire, qui marque le moment où le prophète Mahomet quitte La Mecque pour rejoindre Médine : le 19 juillet 622 du calendrier grégorien (CG). Mais pour des raisons pratiques, le jour de l'an a été fixé à l'équinoxe de printemps, soit à peu près le 21 mars. À noter que le calendrier Jalali (CJ) ne comporte pas d'année 0 et commence en l'an 1 (le 21/03/2003 CG correspond au 01/01/1382 CJ).

Mois

Omar Khayyâm propose un cycle de 33 ans dont 8 années bissextiles :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B				B				B				B			

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
B				B				B				B				

Durée de l'année

La durée de l'année dans le calendrier CJ est de 365, 2424. jours, ce qui découle naturellement du système d'intercalation adopté :

$$365+\frac{8}{33}=365{,}2424\ldots \text{ jours.}$$

En comparaison avec la durée de l'année grégorienne de $365+\frac{1}{4}-\frac{1}{100}+\frac{1}{400}=365{,}2425$ jours, il est possible d'affirmer que la valeur de Khayyâm repose sur une connaissance un peu plus rigoureuse du mouvement annuel du Soleil (la durée actuelle d'une année solaire est de 365, 242 189 8 j).

Vers le milieu du XIX^{e} siècle, le calendrier Jalali commence à devenir d'un usage courant et c'est en 1911 que le Parlement Perse l'adopte comme Calendrier officiel. Ses mois portent les noms des signes du zodiaque et les années héritent de noms d'animaux dans un cycle de 12 ans. Dans ce cycle, les animaux sont les suivants : rat, vache, tigre, lapin, baleine, serpent, cheval, mouton, singe, poule, chien et cochon (l'an 1382 du calendrier iranien qui correspond à 2003-2004 CG est l'année du mouton). Le 31 mars 1925, le calendrier Jalali devient calendrier officiel de l'Iran.

Chapitre 28.

Bhâskara « l'Astrologue »

1114-1185

Son vrai nom est Bhâskarâchârya, ce qui signifie « faiseur de lumière » en sanscrit (en langue indienne), mais on a simplifié son nom en Bhâskara II. Il est le second à porter ce nom : le premier, qui a vécu aux alentours de 629, était un disciple d'Aryabhata (→ chapitre 22). Notre Bhâskara, ici, est le fils de l'astronome en chef de l'observatoire d'Ujjain.

Il poursuit les opérations avec l'infini : $\infty + a = \infty$ et $\frac{a}{0} = \infty$.

Mais pour étayer ses affirmations, il fait appel à des considérations théologiques sur le fait que Dieu reste immuable même dans les périodes de création ou de destruction.

En 1150, il achève *Siddhântashiromani* (« joyau de tête des solutions), qui est divisé en quatre parties :

- un livre d'arithmétique, *Lîlâvati* (« la joueuse ») ;
- un livre d'algèbre, *Bîjaganita* (« calculs sur les symboles ») ;
- un livre d'astrologie, *Grahaganita* (« calcul des planètes ») ;
- un livre d'astronomie, *Golâdhyârya* (« livre des sphères »).

Bhâskara était un astrologue réputé. Il avait calculé avec beaucoup de précision le jour et l'heure propices au mariage de sa fille, Lilavati. C'était le surnom qu'il lui avait donné, car elle aimait faire « les mathématiques en s'amusant ». Le jour dit, elle se pencha au-dessus de l'horloge hydraulique et une perle tomba dans les rouages, bloquant ainsi le mécanisme. Lorsqu'on finit par s'en apercevoir, l'heure propice était passée et Lilavati dut rester célibataire. Pour la consoler, son père donna son surnom à l'un de ses livres.

Chapitre 29.

Leonardo Fibonacci « le Rénovateur »

1180-1250

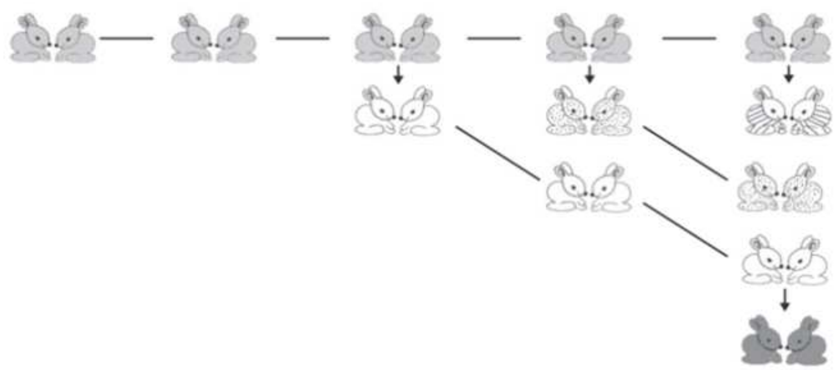
Son vrai nom est Léonard de Pise. Son père, Bonaccio, est un commerçant toscan. En 1192, Léonard le rejoint à Bijâya, en Algérie, pour l'aider. Il y rencontre un maître admirable, selon ses propres dires, qui lui enseigne les nombres indiens et l'algèbre. Il choisit de se faire appeler « le fils de Bonaccio » soit filius Bonacci donc Fibonacci. Il voyage ensuite beaucoup : Égypte, Sicile, Grèce, Syrie, pour y poursuivre son apprentissage. Puis il revient à Pise, en Italie, vers 1200.

Convaincu de la supériorité de la numération de position, il écrit un livre d'explications, *Liber abaci,* (Le livre de l'abaque). Dans ce livre, il présente la notation, explique comment faire les calculs et fait également des extractions de racines carrées et cubiques. Il résout des équations de degré 1 et 2, ainsi que différents problèmes, dont il donne les solutions.

Dans *Practica geometricae* (La pratique de la géométrie), il s'occupe des grands problèmes de l'antiquité : il propose une démonstration du théorème de Pythagore et s'attelle à la duplication du cube, entre autres.

Les lapins

Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois.



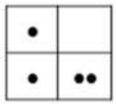
Jour 1	1 couple **gris**	1 couple
Jour 2	1 couple **gris**	1 couple
Jour 3	1 couple **gris** qui fait un couple **blanc**	2 couples
Jour 4	1 couple **gris** qui fait un couple **à pois** 1 couple **blanc**	3 couples
Jour 5	1 couple **gris** qui fait un couple **à rayures** 1 couple **blanc** qui fait un couple **gris foncé** 1 couple **à pois**	5 couples

Le 6e mois, il y a les lapins du 5e mois soit donc 5 couples et les lapins du 4e mois font chacun des petits, soit donc 3 couples. Donc au 6e mois, il y aura $5 + 3 = 8$ couples.

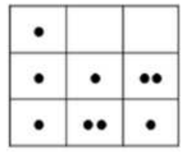
L'escalier

Pour monter un escalier, on peut franchir, à chaque pas, soit une, soit deux marches. De combien de façons peut-on monter un escalier de 5 marches ?

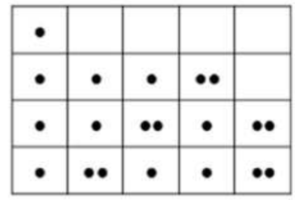
2 marches



3 marches



4 marches



Ce problème donne les mêmes solutions que le précédent :

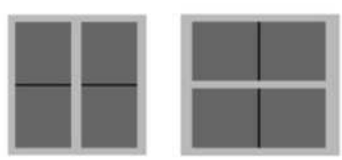
1 marche	1 possibilité
2 marches	2 possibilités
3 marches	3 possibilités
4 marches	5 possibilités

Pour 5 marches, soit on monte sur la première marche et il reste à monter 4 marches, soit donc 5 possibilités, soit on saute la première marche et il reste 3 marches à monter, soit 3 possibilités. Donc pour 5 marches, il a $5 + 3 = 8$ possibilités.

Les dominos

On veut ranger des dominos, à plat, dans une boîte. La largeur de la boîte est égale à la longueur d'un domino.

Pour ranger 2 dominos, il y a 2 façons de faire :



Pour ranger 3 dominos, il y a 3 façons de faire :

Pour ranger 4 dominos, on peut placer le premier domino soit verticalement, dans ce cas il reste 3 dominos à placer, soit 3 solutions, soit on place 2 dominos horizontaux et il reste 2 dominos à placer, soit 2 solutions.

Donc pour placer 4 dominos, il y a 3 + 2 = 5 solutions.

C'est encore un problème qui a les mêmes solutions que les précédents :

2 dominos	2 solutions
3 dominos	3 solutions
4 dominos	5 solutions

Suite de Fibonacci (u_n)

C'est une succession de nombres telle que chaque terme est la somme des deux nombres qui le précèdent. On commence par 0 et 1 :

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	
	0	1	1	2	3	5	8	13	21	etc.
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$	x	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,6153	1,6190	

Plus n est grand, plus $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se rapproche du nombre φ : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$.
φ est appelé ***le nombre d'or*** et $\varphi \approx 1{,}618$.

Le nombre d'or

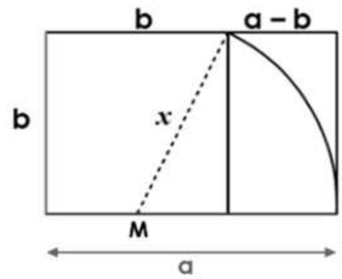
Dans le livre VI, définition 3, Euclide (→ chapitre 11) écrit :

> « Une droite est dite divisée en moyenne et extrême raison quand la longueur totale de la droite est à la grande partie ce que cette dernière est à la petite partie. »

Autrement dit, de manière plus moderne : un segment de longueur a + b est dit divisé en moyenne et extrême raison quand $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. C'est ce rapport qu'on appelle le nombre d'Or. Il est maintenant souvent désigné par la lettre ϕ (phi), en hommage au sculpteur grec Phidias qui s'en est servi pour calculer les proportions du Parthénon à Athènes.

Le Rectangle d'or

Le point M est placé au milieu du côté du carré. C'est le centre de l'arc de cercle dessiné.



Pour b = 1 : $x^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$ et donc $x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Or $a = x + \frac{b}{2} = x + \frac{1}{2}$, donc $a = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Ainsi $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Formule : $\varphi = \frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b}$.

Pour b = 1, on obtient $\varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi}$, soit donc $\varphi^2 = \varphi + 1$ ou $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

Et donc $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$.

Pentagone régulier et pentagramme

La proportion d'extrême et de moyenne raison permet de dessiner un pentagone régulier facilement.

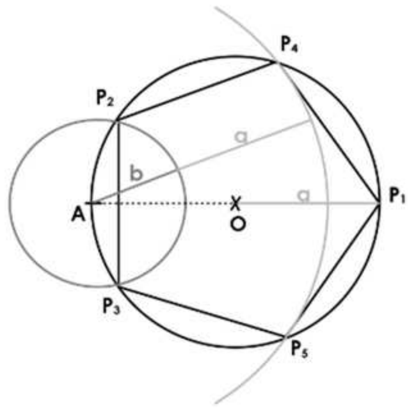
Soit un cercle de diamètre AP_1 et de rayon a.

Soit b est nombre plus petit que a tel que a et b soient en proportion d'or.

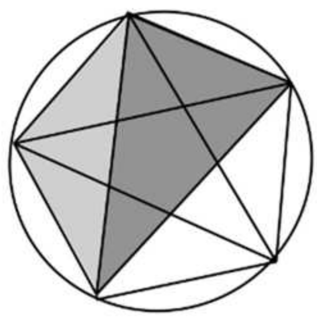
Soient P_2 et P_3 les intersections du cercle de diamètre AP_1 avec le cercle de centre A et de rayon b.

Soient P_4 et P_5 les intersections du cercle de diamètre AP_1 avec le cercle de centre A et de rayon a + b.

$P_1P_2\ P_3P_4P_5$ est un pentagone régulier.

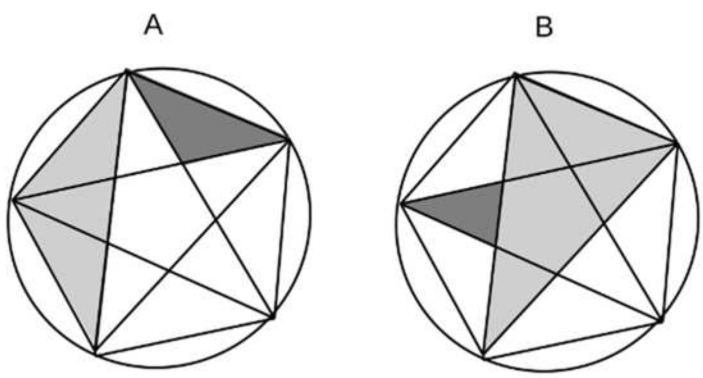


Le pentagramme associé, c'est-à-dire la figure composée des cinq diagonales du pentagone, contient aussi de multiples proportions d'extrêmes et moyennes raisons. Elles s'expriment simplement à l'aide de triangles isocèles dont les longueurs des côtés sont en proportion d'or. De tels triangles sont appelés « triangles d'or ». Il en existe deux types différents :



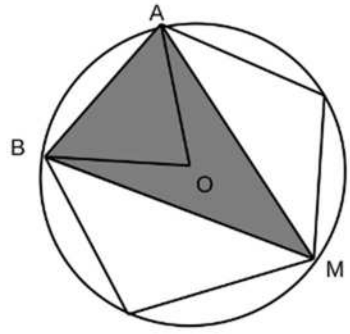
Les gris clairs, ayant une base proportionnelle à a et deux côtés à b *et* les gris foncés ayant une base proportionnelle à b et deux côtés à a.

Les triangles foncés sont semblables aux plus clairs de même couleur, la proportion entre clair et foncé est encore d'or.



Les triangles de la figure A possèdent deux angles de 72° et un angle de 36°.

D'après la propriété qui lie angle au centre et angles inscrits : $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.



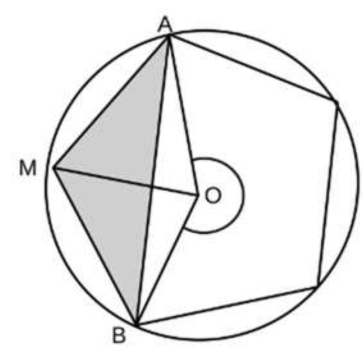
Or $\widehat{AOB} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, donc $\widehat{AMB} = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Le triangle AMB est isocèle en M,

donc $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \dfrac{180^\circ - \widehat{AMB}}{2} = \dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \dfrac{144^\circ}{2} = 72^\circ$.

Un tel triangle est appelé triangle d'or.

Les triangles de la figure B possèdent deux angles de 36° et un de 108°.



On peut encore utiliser ici la propriété qui lie angle au centre et angles inscrits : $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

Mais ici, il faut considérer l'angle $\widehat{AOB}$ « extérieur » : or $\widehat{AOM} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

donc $\widehat{AOB} = 360^\circ - 2 \times 72^\circ = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$.

Par suite $\widehat{AMB} = \dfrac{216^\circ}{2} = 108^\circ$.

AMB étant isocèle en M, on en déduit que

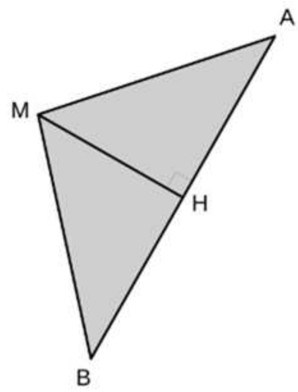
$\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \dfrac{72^\circ}{2} = 36^\circ$.

Un tel triangle est appelé « triangle d'argent ».

Avec des triangles d'or et d'argent dont les côtés sont toujours a et b, il est possible de paver intégralement un plan.

Montrons que $\varphi = 2\cos 36°$:

par définition, $\varphi = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{2AH}{AM}$ (H est le milieu de [AB]).



Donc $\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{AH}{AM}$.

Or dans le triangle AMH rectangle en H, $\dfrac{AH}{AM} = \cos\widehat{HAM} = \cos 36°$.

Donc $\dfrac{\varphi}{2} = \cos 36°$ ainsi $\phi = 2\cos 36°$.

Le nombre φ est très riche : on peut raconter encore beaucoup de choses à son sujet ; il a notamment inspiré les arts plastiques (*L'homme de Vitruve* de Léonard de Vinci, *Le sacrement de la dernière cène* de Dali). Il est également visible sur des éléments naturels, comme par exemple au cœur d'un tournesol, ou sur le coquillage Nautilus pompilus.

Chapitre 30.

Al Kashi « le Généralisateur »

1380-1430

Jemchid ibn Massoud Al Kashi est d'origine persane. Il vit à la cour du prince Ulugh Beg (1393-1449) à Samarcande. À la mort du prince, il part en exil à Constantinople (Istanbul, en Turquie) et diffuse les mathématiques arabes en Turquie, puis en occident. C'est le dernier grand mathématicien arabe.

Il calcule des racines sixièmes de nombres en écriture sexagésimale (en base 60). Il donne un calcul de π avec seize décimales ; il faudra attendre la fin du XVe siècle pour voir mieux. Il connaît également ce que l'on appellera plus tard le Triangle de Pascal.

Dans son livre *Miftah al hisab* (La clé de l'arithmétique), il introduit les fractions décimales, ainsi que le théorème qui porte son nom.

Théorème d'Al Kashi

C'est le théorème de Pythagore, généralisé à tous les triangles :

Dans ABC, si on note a, b et c les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB] alors on obtient $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\hat{A}$.

■ Démontrons cette proposition :
Le triangle CHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AH^2 + CH^2.$$

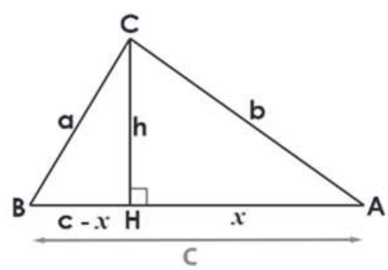
Soit donc $b^2 = x^2 + h^2$ ou encore $h^2 = b^2 - x^2$.
Le triangle CHB est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BH^2 + CH^2.$$

Soit donc $a^2 = (c - x)^2 + h^2$.
Par suite, $a^2 = (c - x)^2 + b^2 - x^2$
$= c^2 - 2cx + x^2 + b^2 - x^2$
$= c^2 + b^2 - 2cx$.

Or $\cos\hat{A} = \dfrac{x}{b}$ donc $x = b\cos\hat{A}$.

Et donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\hat{A}$.



Le triangle de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

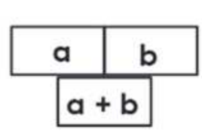
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

C'est un triangle composé de nombres de telle sorte que chaque nombre est la somme des deux qui se trouvent au-dessus de lui :



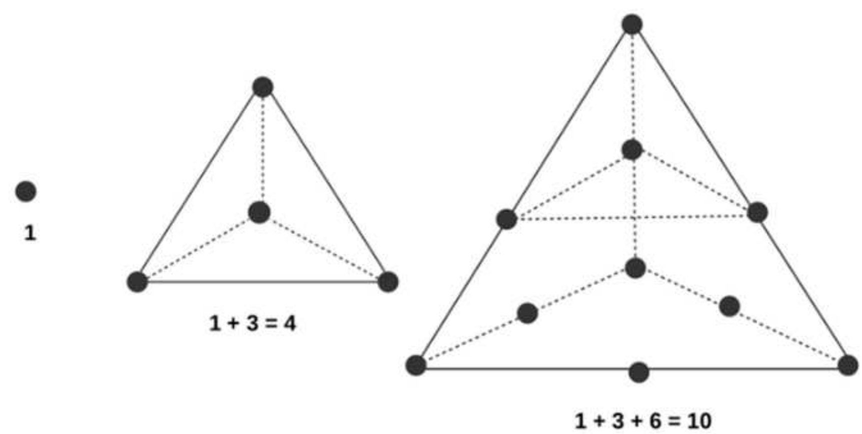
En France, il est connu sous le nom de Triangle de Pascal (1623-1662). En Italie, on le nomme Triangle de Tartaglia (→ chapitre 31).

On peut observer plusieurs propriétés dans ce triangle :

- Les diagonales en **seconde position** sont la suite des nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, ...
- Les diagonales en **troisième position** sont les nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10, 15, ...
- Les diagonales en **quatrième position** sont les nombres tétraédriques : 1, 4, 10, 20, ...
- Et ainsi de suite.

Les nombres triangulaires sont vus au chapitre 2, *Les découvertes attribuées aux pythagoriciens*.

Un nombre tétraédrique est un nombre qui peut être représenté par une pyramide régulière à base triangulaire :



Suite de Fibonacci

En additionnant chaque diagonale du triangle, on retrouve la suite de Fibonacci :

1	$\rightarrow$	1
1	$\rightarrow$	1
$1+1$	$\rightarrow$	2
$1+2$	$\rightarrow$	3
$1+3+1$	$\rightarrow$	5
$1+4+3$	$\rightarrow$	8
$1+5+6+1$	$\rightarrow$	13
$1+6+10+4$	$\rightarrow$	21

Combinaisons

De combien de façons peut-on choisir 3 éléments parmi 7 (si les répétitions ne sont pas permises) ?

Par exemple dans un sac, il y a six jetons numérotés de 1 à 7. Je fais un tirage, je pose le jeton et je recommence encore deux fois. Combien de combinaisons puis-je obtenir ?

Il y a 7 possibilités pour le premier jeton, 6 pour le second et 5 pour le troisième, on peut donc faire $7 \times 6 \times 5 = \frac{7!}{4!} = 210$ tirages différents.

Mais si on ne tient pas compte de l'ordre, il y a moins de possibilités : pour trois jetons définis, il y a $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ façons de les ordonner. Donc finalement, je pourrais faire $n = \frac{210}{6} = 35$ tirages.

On retrouve ce nombre à la $(7 + 1)^e$ ligne, $(3 + 1)^e$ colonne du triangle.

On notera au passage que ce nombre se note $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}$.

Coefficients binomiaux

Lorsqu'on développe $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on peut noter que dans la partie développée, chaque terme est multiplié par un coefficient, à savoir 1, 2, 1. C'est la troisième ligne du triangle.

Si on développe $(a + b)^3$, il suffira d'écrire le développement en prenant les coefficients inscrits sur la troisième ligne du triangle : 1, 3, 3, 1.

Soit donc $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

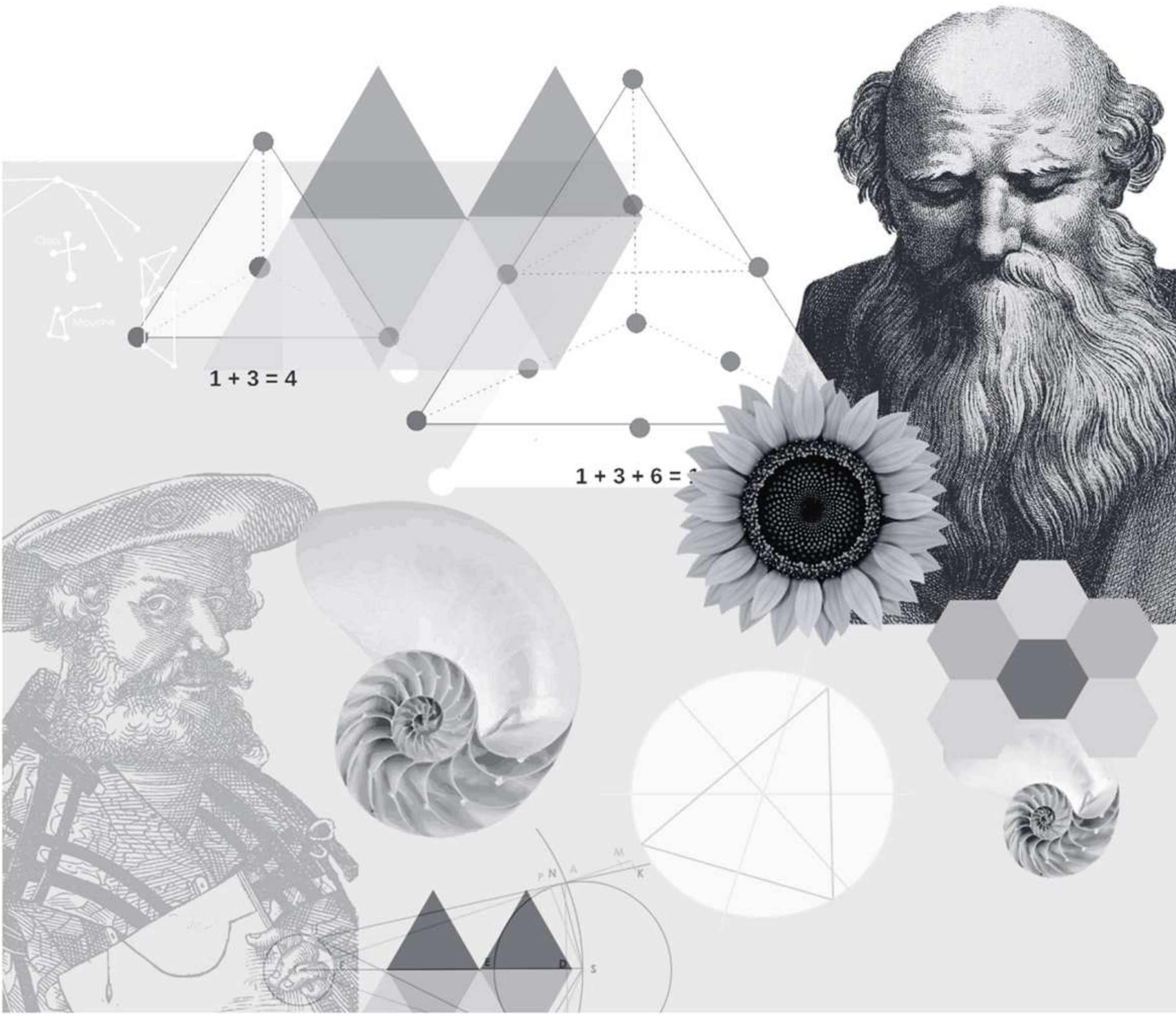
Et d'une manière générale, on peut développer $(a + b)^n$ en choisissant les coefficients du développement dans la n^e ligne du triangle.

C'est ce qu'on appelle le binôme de Newton (1643-1727) :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Partie 3.

Les mathématiciens de la Renaissance




Gartness
Edimbourg
Leyde
Anvers
Bruges
Tours
Poitiers
Padoue
Venise
Milan
Pavie
Brescia
Bologne
Pise
Florence
100 km

Chapitre 31.

Tartaglia « l'Autodidacte »

1499-1557

Son véritable nom est Niccolo Fontana. Il est d'origine modeste et habite Brescia, en Italie, avec sa famille. Mais, alors qu'il n'a que six ans, son père meurt. La famille se retrouve dans une extrême pauvreté. En 1512, les soldats de Louis XII envahissent la ville. Niccolo se réfugie dans la cathédrale de la cité, mais les soldats font intrusion dans l'église. Niccolo est laissé pour mort, avec une fracture au crâne et un coup d'épée en travers de la mâchoire. Sa mère le retrouve et le soigne comme elle peut : n'ayant pas de quoi payer des médicaments, elle lave les plaies à l'eau. Il gardera de ses blessures des cicatrices qu'il cache sous une épaisse barbe et une difficulté de prononciation des mots, ce qui lui vaut son surnom : « tartagliare » signifie « bégayer » en italien. Sa mère économise pour lui permettre d'aller à l'école, mais l'argent manque. Il volera des livres et des cahiers pour apprendre en autodidacte. Son don pour les mathématiques lui permet par la suite de gagner sa vie en enseignant les mathématiques à Vérone, puis à Venise.

La première personne connue pour avoir résolu algébriquement des équations du troisième degré était Scipione del Ferro (1465-1526) : il réussit à résoudre les équations du type $x^3 + ax = b$. Mais il n'en parle à personne et c'est seulement sur son lit de mort qu'il transmet sa découverte à son élève, Antonio Maria del Fiore. Celui-ci s'est un peu trop vanté d'être capable de résoudre des équations cubiques et un défi entre lui et Tartaglia est organisé en 1535. En fait, Tartaglia avait également découvert comment résoudre un type d'équation cubique, à savoir $x^3 + ax^2 = b$. Pour le concours entre Tartaglia et Fiore, chaque homme devait soumettre à l'autre trente questions à résoudre. Aux premières heures du 13 février 1535, l'inspiration vint à Tartaglia, qui put résoudre les trente problèmes de Fior en moins de deux heures. De son côté, Fiore était loin d'avoir fini de résoudre les équations de Tartaglia, qui fut donc déclaré vainqueur du concours. Mais dans l'espoir d'en gagner d'autres, Tartaglia ne dévoile pas sa formule.

En tant que conférencier public de mathématiques à Milan, Cardan (→ chapitre 32) était conscient du problème de la résolution des équations cubiques, mais il supposait que les solutions étaient impossibles. Cardan se mit immédiatement au travail pour essayer de découvrir la méthode de Tartaglia par lui-même, mais en vain. En 1539, il finit par contacter Tartaglia, lui demandant que la méthode puisse être incluse dans un livre qu'il publierait cette année-là. Tartaglia déclina cette opportunité, déclarant son intention de publier sa formule dans un livre qu'il écrirait à une date ultérieure. Cardan, acceptant cela, lui demanda alors qu'il lui montrât sa méthode, promettant de la garder secrète. Tartaglia, cependant, refusa à nouveau. Cardan lui proposa alors de rencontrer le gouverneur de Milan, Alfonso d'Avalos, qui était l'un de ses puissants mécènes. La connaissance de l'influent gouverneur milanais pourrait être très enrichissante et pourrait permettre à Tartaglia de quitter le modeste travail d'enseignant qu'il occupait alors et d'accéder à un emploi plus lucratif à la cour milanaise. Cardan assura qu'il organiserait une rencontre avec d'Avalos. En mars 1539, Tartaglia se rendit donc à Milan, chez Cardan. Mais le gouverneur était temporairement absent de Milan. Tartaglia obtint de son hôte une lettre d'introduction auprès du marquis, en échange de quoi il dévoila à Cardan sa formule, lui demandant de jurer de ne jamais la dévoiler. Tartaglia lui transmit sa formule dans un petit poème :

> « Lorsque le cube et les choses à côté
> S'égalent à quelque nombre discret :
> Trouves-en deux, espacés du connu,
> Et fait en sorte, suivant l'us,
> Que leur produit toujours égale
> Le tiers cubé des choses, net.
> Et le résidu général
> Des côtés cubes bien soustraits
> Te donnera la chose principale. »

Cardan publia deux livres de mathématiques cette année-là et Tartaglia put vérifier que sa formule n'y était pas incluse. Sur la base de la formule de Tartaglia, Cardan et Ferrari, son assistant, firent des progrès remarquables en trouvant des preuves de tous les cas des équations du troisième degré et, plus impressionnant encore, en résolvant les équations du quatrième degré (→ chapitre 33). Ils se rendirent à Bologne en 1543 et apprirent que c'était del Ferro et non Tartaglia, qui avait été le premier à résoudre l'équation cubique. Cardan estima que, bien qu'il ait juré de ne pas révéler la méthode de Tartaglia, rien ne l'empêchait de publier la formule de del Ferro.

En 1545, Cardan publia *Ars magna*, qui contenait des solutions aux équations cubiques et quartiques et tous les travaux supplémentaires qu'il avait effectués sur la formule de Tartaglia. Del Ferro et Tartaglia furent crédités de leurs découvertes, tout comme Ferrari. Mais Tartaglia fut furieux de découvrir que Cardan avait ignoré son serment. L'année suivante, en 1546, Tartaglia publia un livre, *Quesiti et Inventioni diverse* qui énonçait clairement sa version de l'histoire et sa conviction que Cardan avait agi avec une extrême mauvaise foi.

Ars Magna avait clairement établi Cardan comme grand mathématicien et il ne fut pas très gêné par les attaques de Tartaglia. Ferrari, cependant, écrivit à Tartaglia, le défiant à un débat public. Le 10 août 1548, le concours eut lieu dans l'église du jardin des Frati Zoccolanti à Milan. Tartaglia avait une grande expérience de tels débats et s'attendait donc à gagner. Cependant, Ferrari avait clairement compris les équations cubiques et quartiques de manière plus approfondie et la victoire fut décernée à Ferrari. Conséquence fâcheuse de cette défaite pour Tartaglia : après avoir donné ses conférences pendant un an à Brescia, on l'informa que son traitement ne serait pas honoré ; même après de nombreux procès, Tartaglia ne put obtenir aucun paiement et retourna à son ancien travail à Venise, nourrissant un énorme ressentiment envers Cardan. Il mourut dans la pauvreté dans sa maison de la Calle del Sturion, près du pont du Rialto, à Venise.

Aujourd'hui, la formule porte le nom de Cardan-Tartaglia. Cependant, Tartaglia a contribué aux mathématiques de plusieurs autres manières. Il a en outre écrit *La Nova Scientia* (1537) sur l'application des mathématiques aux tirs d'artillerie. Il a également écrit un texte d'arithmétique populaire et a été le premier traducteur et éditeur italien des Éléments d'Euclide en 1543. Tartaglia a également publié des éditions latines des œuvres d'Archimède.

Chapitre 32.

Cardan « l'Ambitieux »

1501-1630

Girolamo Cardano est né à Pavie en 1501. Son nom francisé est Jérôme Cardan.

Le père de Cardan, Fazio, était procureur du fisc, docteur, juriste. La mère de Cardan était, d'après son fils, « grosse, pieuse, irascible », mais « douée d'une mémoire et d'un esprit supérieurs ». Girolamo fut élevé à la dure, se faisant battre régulièrement. Et chaque fois, avouait-il, il était malade à en mourir.

Outre les petits problèmes que chacun rencontre dans son enfance, il attrapa la variole alors qu'il n'était que nourrisson. À huit ans, il eut une dysenterie et à dix-huit ans, il attrapa la peste. Il est de taille médiocre, a la poitrine étroite et les bras grêles. Mais sa tête fonctionne bien.

À vingt ans il enseignait Euclide à l'université de Pavie, qu'il quitta pour Padoue, où il obtient un diplôme de médecin en 1526. Puis il s'installe à Milan. Il gagne sa vie en donnant des cours de mathématiques. Il est admis en 1539 au collège des médecins et en 1543 il devient professeur de médecine à l'université de Pavie. De 1562 à 1570, il est professeur à Bologne.

Aldo, le cadet, était un délinquant extrêmement violent. Lorsqu'il revenait chez son père, il lui faisait des scènes terribles. Excédé, Cardan finit par le chasser et le déshériter. Mais avec l'aide d'un étudiant, secrétaire de Cardan, Aldo s'introduisit dans la maison paternelle, força un coffre et vola l'argent qu'il y trouva. Les cambrioleurs furent rapidement rattrapés puis jugés : Aldo fut emprisonné et son complice condamné aux galères. Aldo décida de se venger. De sa prison, il envoya une lettre au Saint-Office à Rome (la terrible Inquisition), dans laquelle il dénonçait son père. Cardan fut immédiatement emprisonné. Il perdit le droit d'enseigner et de publier. Il s'installa à Rome et y vécut d'une pension jusqu'à sa mort.

Ce que l'on reprochait à Cardan :

- d'avoir écrit que le christianisme n'était pas supérieur aux autres religions monothéistes ;
- de s'opposer au dogme de l'immortalité de l'âme ;
- d'avoir dressé l'horoscope de Jésus-Christ, comme s'il eût été un vulgaire humain.

Voici quelques inventions de Cardan

■ Chambre noire et objectif photographique.

Vers 1550, Cardan remplace par une lentille le sténopé, « petit trou » de la chambre noire décrite par Léonard de Vinci, qui lui permettait de dessiner les perspectives avec exactitude. Cette petite lentille de verre convexe placée devant le trou qui admet la lumière dans la chambre noire rendait les images d'une netteté inconnue jusqu'alors, permettant une reproduction plus précise des perspectives.

■ Le joint de Cardan ou tout simplement le cardan.

Sur les bateaux, c'est un mécanisme d'articulation qui permet aux lampes à huile de rester verticales indépendamment des inclinaisons que prenait le navire. Sur une voiture, ce mécanisme est également utilisé pour assurer une transmission régulière entre les roues et le moteur.

En Médecine

En médecine, Jérôme Cardan fut le premier à distinguer la syphilis de la gonorrhée. Il préconisa également l'envoi des tuberculeux en montagne pour les faire bénéficier du soleil et enrayer ainsi leur maladie, alors incurable.

L'intérêt de Cardan se porta également sur les soins par les plantes : calmer les douleurs avec une décoction de feuilles et d'écorce de saule (notre future aspirine ?) ; soigner les maux de tête et les douleurs musculaires par l'absorption d'un élixir fait de graines et de suc de pavot macérés dans du vin ; combattre les blessures infectées en utilisant des moisissures de raisin ou de melon (notre future pénicilline ?) ; guérir les fractures avec un broyat de feuilles d'aloès en cataplasme ; stimuler les virilités paresseuses en absorbant un vin doux au gingembre.

En Mathématiques

Cardan est un précurseur du calcul des probabilités. Il était un joueur invétéré et avait remarqué que « dans mille coups de mille dés non truqués, on obtient nécessairement un résultat identique » (loi des grands nombres ?) On retrouve ces réflexions dans un essai posthume, *De ludo aleae.*

Cardan, durant toute sa vie, fit tout ce qui était en son pouvoir pour que son nom reste attaché à l'Histoire. Bien qu'il ne découvrît pas la méthode de résolution de l'équation du troisième degré (del Ferro), ni ne l'élargît à tous les types (Tartaglia), ni non plus ne découvrît celle pour l'équation du quatrième degré (Ferrari), son nom est à jamais attaché à la résolution de tous les types d'équation du troisième degré : la méthode de Cardan.

Les équations du 3e degré

Formule de Cardan-Tartaglia

Cette formule permet de résoudre les équations du type $x^3 = px + q$.

Ou encore $x^3 - px - q = 0$.

On pose $x = u + v$.

On obtient alors $(u+v)^3 - p(u+v) - q = 0$.

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - p(u+v) - q = 0$.

$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) - q = 0$.

$u^3 + v^3 + (3uv - p)(u+v) - q = 0$.

On pose $uv = 2$: on obtient alors $u^3 + v^3 - 9 = 0$.

Soit donc $\begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ u^3 \times v^3 = 8 \end{cases}$

On peut en déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré $X^2 - 9X + 8 = 0$.

On pose $\Delta = 81 - 4 \times 8 = 81 - 32 = 49 = 7^2$.

Les solutions de l'équation sont : $u = \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1$ et $v = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

$u + v = 1 + 2 = 3$ est solution de l'équation $x^3 = 6x + 9$.

En factorisant par (x– 3), on obtient l'équation $(x-3)(x^2+3x+3) = 0$,

mais (x^2+3x+3) n'a pas de racine réelle.

Chapitre 33.

Ferrari « l'Épigone »

1522-1565

Lodovico Ferrari est né à Bologne le 2 février 1522. À 14 ans, il est employé par Cardan en tant que domestique. Mais le mathématicien se rend vite compte des capacités de son employé. Il le prend comme secrétaire et lui enseigne les mathématiques. Ferrari surpassera son maître en résolvant les équations du quatrième degré. En 1540, il récupère le poste de Cardan à Milan et devient conférencier en géométrie. En 1548, il se range aux côtés de son maître dans le combat qui l'opposait à Tartaglia. Il meurt en 1565, empoisonné par sa sœur.

Les équations du 4^e degré

Montrons la résolution sur un exemple :

$x^4 - 12x + 3 = 0$.

On pose $\left(x^2 + t\right)^2 = x^4 + 2tx^2 + t^2 + 12x - 12x + 3 - 3$,

On obtient $\left(x^2 + t\right)^2 = x^4 - 12x + 3 + 2tx^2 + t^2 + 12x - 3$.

Or $x^4 - 12x + 3 = 0$ donc $\left(x^2 + t\right)^2 = 2tx^2 + t^2 + 12x - 3$. **(1)**

On cherche t de sorte que $2tx^2 + t^2 + 12x - 3$ soit un carré parfait.

$\Delta = 12^2 - 4 \times 2t \times \left(t^2 - 3\right) = 0$.

Ainsi $144 - 8t \times \left(t^2 - 3\right) = 0$.

$8t^3 - 24t - 144 = 0$, et donc $t^3 - 3t - 18 = 0$.

C'est une équation du 3e degré, que l'on peut résoudre avec la méthode de Cardan. Mais ici, il y a une solution évidente, à savoir 3 :

(1) devient alors $\left(x^2+3\right)^2 = 6x^2+12x+9-3$,

et $\left(x^2+3\right)^2 = 6x^2+12x+6 = 6\left(x^2+2x+1\right) = 6\left(x+1\right)^2$.

On en déduit que $x^2+3 = -\sqrt{6}\left(x+1\right)$ **(a)**

ou que $x^2+3 = \sqrt{6}\left(x+1\right)$ **(b)**

Pour (a)

$$x^2+\sqrt{6}\left(x+1\right)+3=0$$

$$x^2+x\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}+3\right)=0$$

$\Delta = 6-4\times\left(\sqrt{6}+3\right) = 6-4\sqrt{6}-12 = -6-4\sqrt{6} < 0$

donc pas de solution réelle.

Pour (b)

$$x^2-\sqrt{6}\left(x+1\right)+3=0$$

$$x^2-x\sqrt{6}-\left(\sqrt{6}-3\right)=0$$

$\Delta = 6+4\times\left(\sqrt{6}-3\right) = 6+4\sqrt{6}-12 = -6+4\sqrt{6} > 0$

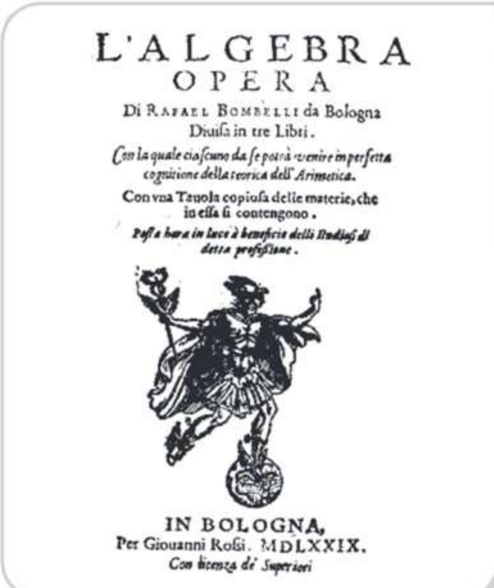
Il y a donc deux solutions réelles à l'équation du 4e degré de départ, à savoir :

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}$$

On peut se demander si la résolution de ces équations continue avec les degrés 5 et au-delà. Mais au XIXe siècle, Évariste Galois (1811-1832) montre que l'on ne peut pas résoudre par radicaux des équations de degré cinq ou plus.

Chapitre 34.

Bombelli « l'Audacieux »


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta
cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che
in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di
detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

1526-1572

Rafaele Bombelli est le fils d'un marchand de Bologne, en Italie. Ingénieur, il travaille à l'assèchement des marécages. Mais son travail subit des interruptions, ce qui lui laisse du temps libre, qu'il consacre aux mathématiques. Il écrit un traité d'Algèbre, entre 1557 et 1560. Mais quelques années plus tard, il découvre l'arithmétique de Diophante (→ chapitre 19) qui l'impressionne et l'influence beaucoup. Il intègre à ses propres exercices des exercices de Diophante. Il modifie également son traité, laissant de côté les aspects concrets, chers aux mathématiciens de son époque, pour se consacrer aux exercices purement abstraits.

Ce livre ne sera publié qu'en 1572, année de sa mort.

Les nombres complexes

Ce sont des nombres de la forme a + ib, a et b étant deux nombres réels et i étant le nombre tel que $i^2 = -1$.
a + ib est un nombre complexe, ib en est sa partie imaginaire.

La première approche des nombres complexes est de Cardan (Cf. chapitre 32), qui les utilise pour les solutions de ses équations. Il a besoin de définir un nombre dont le carré est négatif. Il les appelle les

En remplaçant r par la valeur de droite de cette égalité, on obtient $r = \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + r}}$ et on peut recommencer ainsi à l'infini.

Par suite, $\sqrt{7} = 2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \dots}}}$.

Plus on itère le procédé, plus on se rapproche de la valeur de $\sqrt{7}$.

Un deuxième exemple : √2

$1 < \sqrt{2} < 2 \sqrt{2} = 1 + r$ avec $0 < r < 1$.

$2 = \left(1 + r^2\right) = 1 + 2r + r^2$

et donc $2 - 1 = 2r + r^2$ soit donc $1 = r(2 + r)$.

Par suite $r = \dfrac{1}{2 + r}$.

Ce qui nous donne donc enfin $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$.

On conçoit alors que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction finie. On en déduit donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Une autre démonstration est donnée chapitre 8.

Les nombres complexes

Cardan

En cherchant à résoudre l'équation $10x - x^2 = 40$, Cardan trouve deux solutions qu'il note, faute de mieux, 5. p̃ Rx . m̃ . 15 et 5.m̃ Rx .m̃. 15 ce qui, en notation moderne, se noterait $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.

Il nomme ces racines carrées de nombres négatifs les nombres *sophistiqués,* mais il ne s'étend pas plus sur le problème.

Bombelli s'intéresse à l'équation $x^3 = 15x + 4$.

Il reprend la formule de Cardan et la transforme :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}.$$

Intéressons-nous à $\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$ dans le cas de l'équation de Bombelli, en remplaçant donc p par 15 et q par 4 :

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4}} = \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{4 \times 27}} = \sqrt{\frac{27 \times 4^2 - 4 \times 15^3}{4 \times 27}} = \sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$$

et donc $x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$.

Bombelli cherche alors les racines cubiques de $2 + 11\sqrt{-1}$ et de $2 - 11\sqrt{-1}$.

Il a l'intuition que :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3\sqrt{-1} \times 2^2 + 3\sqrt{-1}^2 \times 2 + \sqrt{-1}^3$$

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}$$

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Ainsi $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$.

Et de même $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$.

Par suite $x = 2 + 11\sqrt{-1} + 2 - 11\sqrt{-1} = 4$.

Pour finir, on peut constater que $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)\left(x^2 + 4x + 1\right)$.

En résolvant $\left(x^2 + 4x + 1\right) = 0$, on trouve $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = -2 - \sqrt{3}$.

Par suite $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)\left(x + 2 - \sqrt{3}\right)\left(x + 2 + \sqrt{3}\right)$.

En 1774, le mathématicien suisse **Leonhard Euler (1707-1783)** estime que la notation $\sqrt{-1}$ pose un problème :

- d'une part $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}^2 = -1$,
- et d'autre part $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$.

Il décide de remplacer la notation $\sqrt{-1}$ par le nombre i (initiale du mot *imaginaire*).

Chapitre 35.

François Viète « le Décrypteur »

1540-1603

François Viète fait des études de droit à l'université de Poitiers et est diplômé en 1560. Il s'intéresse à l'astronomie et écrit un traité qui paraît en 1537 sous le titre ***Principes de cosmographie***, mais il poursuit une carrière juridique. En 1589, il est embauché auprès de Henri III comme conseiller auprès du parlement de Tours. En 1594, il entre au service d'Henri IV.

Les hommes du roi interceptent régulièrement des lettres codées que les Espagnols envoient aux catholiques. Impossible de les déchiffrer. Henri IV les soumet à Viète, qui réussit à les décoder, alors même que les Espagnols modifiaient le code. Il avait mis au point un procédé lui permettant de suivre les transformations du code ; Viète conseille successivement :

- de repérer les mots pouvant représenter les dates, les lieux, les titres des expéditeurs, qui sont souvent placés hors du texte et peuvent être repérés ;

- d'associer, si les nombres apparaissent en clair, les centaines avec des noms comme chevaux ou ceux de troupes légères, bataillon, régiment, de plus grandes quantités avec des corps d'armées, d'infanterie et les plus importantes avec des sommes d'argent : ducats, sequins, deniers, livres, selon les ordres de grandeurs ;
- de chercher les fréquences les plus élevés et d'y voir des voyelles et de rechercher les doubles, afin de leur associer les doublements les plus fréquents (deux l ou deux n, deux s, etc.) ; dans trois lettres successives, une au moins est une voyelle. Et même si ce n'est pas toujours le cas en français (entre, contre...), il s'agit tout de même d'une bonne aide pour les localiser ;
- de noter ces conjectures et de recommencer sans craindre de gâcher du papier, jusqu'à ce que le texte à déchiffrer apparaisse.

Les Espagnols, comme les Italiens, n'usent que de codes de substitution assez simples, dérivés des techniques de substitution qu'on rencontrait déjà dans le code César ou celui de Marie Stuart. Mais lorsque Viète parvient à déchiffrer la lettre du commandeur Moréo et d'en deviner la clef, l'impact politique fut de grande importance. Henri IV lui confia la responsabilité de déchiffrer toutes les lettres ennemies et de suivre l'évolution de leurs codes.

L'application de la méthode de Viète permet (avec beaucoup de travail) de venir à bout de la quasi-totalité des messages codés de l'époque (les codes à la Vigenère exceptés). C'est en cela qu'il rend caduques les techniques de chiffrement de l'époque. Mais Viète offre également par ce biais l'espoir de pouvoir résoudre le problème de tous les crypto analystes, à savoir casser tous les codes. Une grande similitude d'action est à l'œuvre dans la façon d'opérer de Viète tant en algèbre qu'en cryptographie, à tel point que certains historiens n'ont pas hésité à faire découler son habileté dans l'art du code de ses aptitudes mathématiques, ou de donner aux fondements de l'algèbre nouvelle la pratique du déchiffrement.

Convaincues que, sans l'aide de la magie, personne ne pouvait réussir à décrypter leur message, les autorités de Madrid dénoncèrent Viète à l'Inquisition. Il faillit être traduit comme sorcier devant le Saint-Office de Rome. Mais le propre cryptologue du pape avait réussi à décoder des missives du roi espagnol, vingt ans plus tôt.

Le code César

On décale chaque lettre d'un certain nombre de rangs.

Par exemple, pour trois rangs :

- A devient D
- B devient E
- C devient F
- etc.

Mais ce code est très facile à déchiffrer, même sans connaître la clé.

Le code César amélioré : codage par applications affines

On numérote les lettres de 0 à 25.
On choisit deux nombres a et b et à chaque lettre de rang n, on applique la fonction $f(n) = an + b$.
On prend ensuite le reste du résultat dans la division par 26.

Exemple avec a = 5 et b = 3 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63
3	8	13	18	23	2	7	12	17	22	1	6	11
D	I	N	S	X	C	H	M	R	W	B	G	L

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	118	123	128
16	21	0	5	10	15	20	25	4	9	14	19	24
Q	V	A	F	K	P	U	Z	E	J	O	T	Y

Si on a à disposition le tableau de départ, on peut décoder le texte en lisant le tableau à l'envers. Mais en l'absence de ce tableau, si on arrive à déterminer, par exemple, que E est codé en X et que S est codé en P, il s'agit alors de retrouver la fonction f, c'est-à-dire de trouver a et b tels que $f(n) = an + b$:

E codé en X donc $f(4) = 23$

S codé en P donc $f(18) = 15$

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 23 \bmod 26 & (1) \\ 18a + b \equiv 15 \bmod 26 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2): 14a \equiv -8 \bmod 26$.

Donc $14a \equiv 18 \bmod 26$.

Par suite $14a = 18 + 26p$ ou encore $7a = 9 + 13p$.

Pour p = 1, on obtient a = 5.

Par suite, $4 \times 5 + b = 23$ soit donc b = 3 d'où f(n) = 5 a + 3

Remarquons qu'on ne peut pas choisir librement a et b.

Par exemple, pour a = 0, toutes les lettres seraient codées par la même lettre, le texte ne serait plus déchiffrable. En fait, il faut s'assurer que dans la dernière ligne du tableau, il n'y ait pas de répétition de lettre. Il faut donc que toutes les lettres soient représentées, ce qui revient à dire que l'on doit avoir tous les nombres de zéro à vingt-cinq dans l'avant dernière ligne. (Cela revient à dire que la fonction *f* utilisée est bijective.)

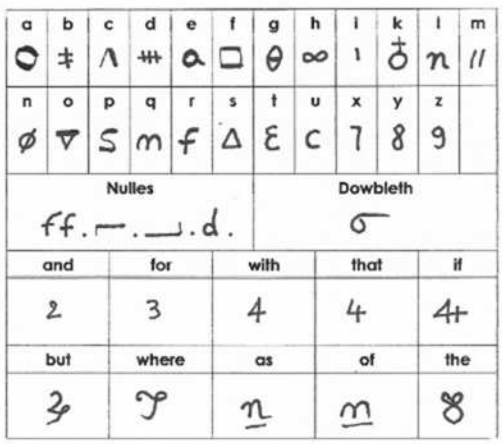
Et malheureusement, en ce qui concerne ce codage, si le texte est long, il est facile ici aussi de le décoder (→ *Fréquences*, au paragraphe suivant).

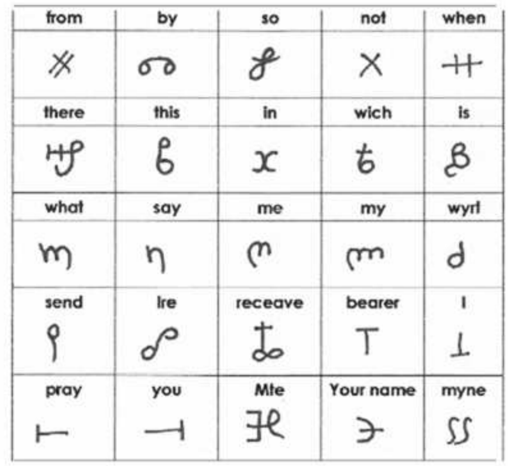
Al Kindi (801-873)

Il propose de calculer les fréquences des lettres trouvées dans le texte codé. Et de comparer ensuite avec la fréquence d'apparition des lettres dans la langue du message. Dans un texte en français, la lettre la plus fréquente est le E, suivi du A. Bien sûr, on peut également tabler sur le fait qu'une lettre isolée est certainement un A. Avec ce système de décryptage, il est particulièrement facile de décoder un texte suffisamment long codé avec un système de substitution, comme le code César (amélioré ou non).

Code de Mary Stuart (1542-1587)

Le code utilisé était une substitution à laquelle on ajoute une petite difficulté, comme le montre la figure ci-dessous. Il était constitué de 23 symboles qui remplaçaient les lettres de l'alphabet (sauf j, v et w), ainsi que de 36 symboles représentant des mots ou des phrases. Il y avait en outre quatre nulles et un symbole qui signifiait que la lettre suivante était une lettre doublée.





Le code de Vigenère (1523-1596)

C'est un code à clé, c'est-à-dire un mot choisi au hasard.

Par exemple, avec le mot MATH, codons la phrase :

A P P R E N O N S A C O D E R
M A T H M A T H M A T H M A T

U N T E X T E
H M A T H M A

On décale chaque lettre de la première ligne du numéro d'ordre de la lettre située en dessous.

Ainsi :

- A est décalé de 12 (M) : $0 + 12 = 12 \rightarrow$ M
- P est décalé de 0 (A) : $15 + 0 = 15 \rightarrow$ P
- P est décalé de 19 (T) : $15 + 19 = 34 \rightarrow 8 \rightarrow$ I
- et ainsi de suite.

Bien entendu, pour décoder un texte, il faut indiquer le mot clé.

Les tables de Vigenère rendent effectivement beaucoup plus difficile le déchiffrement. Elles résisteront aux cryptanalystes jusqu'aux travaux de Charles Babbage en 1854 et de Friedrich Wilhelm Kasiski en 1863.

Chapitre 36.

Simon Stevin « le Précurseur »

1548-1620

Simon Stevin est un mathématicien Belge. Il naît à Bruges en 1548 sous le règne de Charles Quint.

En 1564, il est employé comme commis d'un marchand à Anvers. En 1577, il s'occupe des finances du port de Bruges. Mais il échoue dans l'obtention de la franchise des droits sur la bière et décide de s'expatrier : il travaille successivement en Prusse, en Pologne, au Danemark, en Suède et en Norvège avant de revenir aux Pays-Bas en 1581. Il s'inscrit à l'université de Leyde pour y suivre des cours de mathématiques. La même année, il publie déjà ***Problemum geometricorum*** (Problèmes de géométrie). Durant ses études, Simon se lie d'amitié avec Maurice de Nassau, prince d'Orange et fils de Guillaume le Taciturne. Maurice sera appelé au pouvoir après l'assassinat de son père en 1584. Il demandera à Simon d'entrer à son service et il lui confiera la charge de quartier-maître de l'armée des États généraux.

On lui doit l'invention d'un chariot à voile roulant à la vitesse d'un cheval au galop et pouvant transporter 28 personnes.

Pour 12,37 × 4,32 :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} \\
 & & 1 & 2 & 3 & 7 \\
 & & & 4 & 3 & 2 \\
\hdashline
 & & 2 & 4 & 7 & 4 \\
 & 3 & 7 & 1 & 1 & \\
4 & 9 & 4 & 8 & & \\
\hdashline
5 & 3 & 4 & 3 & 8 & 4 \\
 & \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4}
\end{array}
$$

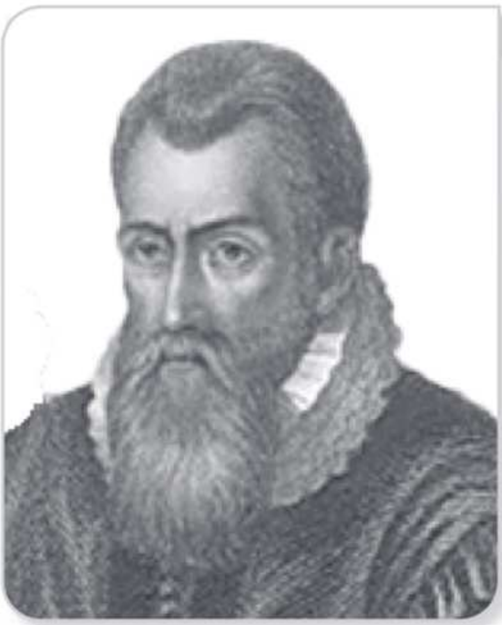
Pour la division, Stevin donne l'exemple de 3⓪4①4②3③5④2⑤ divisé par 9①6②.

Il effectue la division entière de 344352 par 96, ce qui donne 3587.

Étant donné que ⑤ – ② = ③, Il obtient ensuite 3⓪5①8②7③.

Chapitre 37.

John Napier « le Sorcier »



1550-1617

Son véritable nom est John Napier, mais il est plus connu chez nous par son nom francisé, John Neper.

C'est un mathématicien écossais, qui a fait ses études à l'université de St Andrews. Il a poursuivi ses études en Europe, puis est revenu s'installer en Ecosse. Issu d'une famille riche, il possède une grande propriété : le château de Gartness, dans le comté de Stirling. Il se forge une réputation de sorcier : un de ses serviteurs le volait régulièrement. Pour démasquer le coupable, il avait convoqué tous ses serviteurs et leur avait expliqué qu'il avait un coq doté de pouvoirs magiques, qu'il serait capable d'identifier le voleur. Il avait enfermé le coq dans une pièce obscure ; chaque serviteur devait, à tour de rôle, entrer dans la pièce et caresser l'animal. Neper avait enduit de suie le dos du coq. Le coupable, redoutant d'être reconnu, ne l'avait pas touché et était le seul à avoir encore les mains propres. On raconte également qu'il était dérangé par les pigeons de son voisin, qui venaient picorer les graines dans sa propriété. Il en parle au voisin, lui demande de faire en sorte de retenir ses pigeons et le menace de confisquer les oiseaux si rien n'est fait. Évidemment, le voisin donne son accord, bien persuadé que Neper ne pourrait jamais attraper les pigeons. Mais quelques jours plus tard, il voit ses pigeons tituber sur le terrain et Neper les ramasser pour les mettre dans un grand sac. Il avait imbibé les graines de whisky. La nuit, n'arrivant pas à dormir, il se promène dans le château avec son coq noir sur son épaule.

C'est un protestant convaincu. Dans son livre ***A plaine discovery of the whole revelation of Saint John*** (1594), il condamne fermement le catholicisme. Lors de la guerre anglo-espagnole (1585-1604), il se range aux côtés d'Élisabeth 1ère d'Angleterre, qui représente la défense de la réforme protestante face aux Espagnols catholiques. Il prendra pour modèle Archimède, qui avait défendu Syracuse contre les Romains. il reprend plusieurs travaux de celui-ci, pour tenter de les perfectionner, comme la vis d'Archimède ou le miroir incendiaire.

Il est le créateur des logarithmes, qu'il mettra vingt ans à mettre au point et qu'il détaille dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) et Mirifici *logarithmorum canonis constructio* (1619).

Dans ***Rabdologiae, seu numerationis per virgula libri duo*** (1617), il décrit une méthode mécanique de multiplication à l'aide de baguettes.

Le logarithme népérien

Lorsque l'on manipule de grands nombres, notamment en astronomie, les calculs deviennent vite compliqués, en particulier lorsque l'on doit multiplier ou diviser ces grands nombres. Neper cherche à se simplifier la vie : il souhaite trouver une façon de remplacer ces multiplications et ces divisions par des additions et des soustractions :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\text{et } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b).$$

On notera que ce problème avait déjà été soulevé par Archimède, dans l'***Arenaire*** (→ chapitre 14, *Le nombre de grains de sable de l'univers*) et que Neper cherche en fait à améliorer la solution trouvée par celui-ci.

C'est Neper qui donne le nom *logarithme* :

- logos : raison, sous-entendu raison de progression arithmétique ;
- arithmos : nombre, quantité.

De façon assez évidente, on peut se rapprocher des puissances : c'est la puissance à laquelle il faut élever une constante, la base, pour obtenir un nombre donné.

Par exemple, en base 10 : log (1000) = $\log(10^3) = 3$.

Et en base n : $\log_n\left(n^a\right) = a$.

On constate alors que :

$$\log_n\left(n^a \times n^b\right) = \log_n\left(n^{a+b}\right) = a + b = \log_n(a) + \log_n(b)$$

et que $\log_n\left(\dfrac{n^a}{n^b}\right) = \log_n\left(n^{a-b}\right) = a - b = \log_n(a) - \log_n(b)$.

Henry Briggs (1561-1630), mathématicien et astronome anglais, est enthousiasmé par le système de Neper. Ils ont ensemble de nombreux échanges et le système logarithmique prend forme : le logarithme de 1 sera égal à 0 et le logarithme de 10 sera égal à 10^{14}. Briggs calcule des tables de logarithmes avec 14 chiffres exacts, puis il opère une modification et travaille sur le logarithme en base 10 : à l'unité on associe 0 et à 10 on associe 1.

Leonhard Euler propose une nouvelle base, notée e (l'initiale de son nom), dans laquelle il associe 0 à l'unité et 1 à e. En hommage à Neper, il note ce logarithme ln.

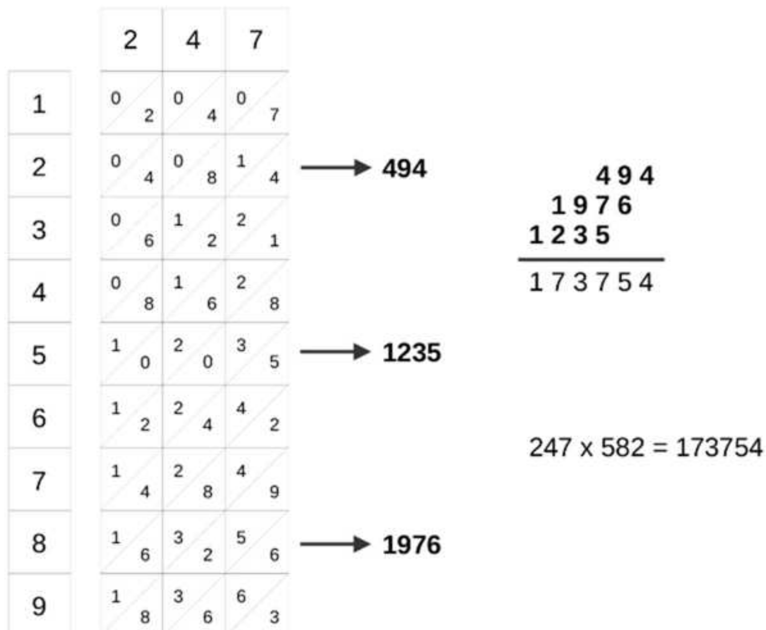
		Base
Neper	log (1) = 0	log (10) = 10^{14}
Briggs	log (1) = 0	log (10) = 1
Euler	ln (1) = 0	ln(e) = 1

Euler démontre que la constante e est irrationnelle, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction et il en calcule 24 décimales :

e = 2, 718 281 828 459 045 235 360 287...

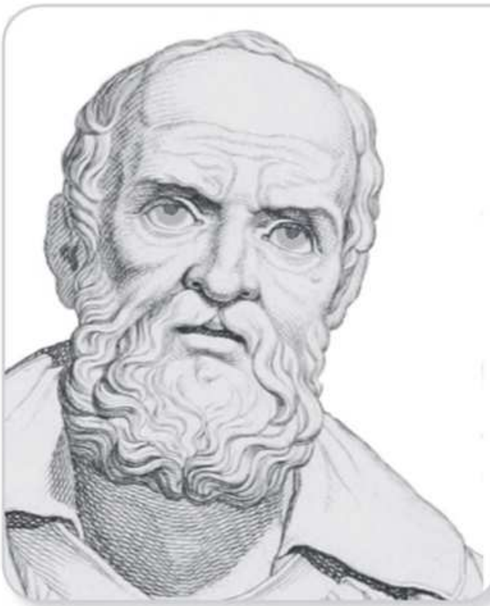
Il est utile d'avoir plusieurs baguettes du même chiffre, afin de pouvoir faire des multiplications avec un nombre comportant le même chiffre (343 × 7, par exemple).

On peut également faire des multiplications à plusieurs chiffres, on applique la même méthode que dans les multiplications posées, on additionne en décalant d'un rang à chaque ligne.



Chapitre 38.

Galilée « le Tenace »



1564-1642

Galileo Galilei est né à Pise en 1564. À dix ans, il reçoit une éducation religieuse, puis il entame des cours de médecine, qu'il abandonne, faute d'intérêt. En 1583, Il rencontre le mathématicien Ostilio Ricci, un ami de la famille, élève de Tartaglia, qui l'initie aux mathématiques et qui a l'habitude, rare à l'époque, de lier la théorie à la pratique par l'expérience. Il a également été influencé par Giovanni Battista Benedetti, autre élève de Tartaglia. Galilée réoriente ses études vers les mathématiques.

Il est nommé à la chaire de mathématiques de l'Université de Pise en 1589, puis à celle de Padoue à partir de 1592. L'astronomie fait partie des disciplines enseignées et bien que l'intéressé soit au courant des travaux de Copernic, il prône, officiellement, le modèle physique ancien selon lequel la Terre se trouve immobile, au centre de l'Univers. Mais en privé, à l'instar de Copernic, il pense que l'héliocentrisme est la bonne théorie, plaçant plutôt le Soleil au centre de l'Univers.

En 1609, Galilée découvre une longue-vue conçue par l'opticien hollandais Hans Lippershey un an auparavant. Elle grossit les objets observés environ sept fois. Galilée effectue quelques retouches et la transforme en lunette astronomique, ce qui lui permet d'observer des étoiles invisibles à l'œil nu. En quelques semaines, il découvre la nature de la Voie lactée, dénombre les étoiles de la constellation d'Orion et constate que certaines étoiles visibles à l'œil nu sont en fait des amas d'étoiles. Le 7 janvier

1610, Galilée fait une découverte capitale : il aperçoit quatre petites étoiles qui sont en réalité les satellites de la planète Jupiter : Io, Europe, Ganymède et Callisto. Ces satellites ont été nommés, par la suite, satellites galiléens, en son honneur. Ses observations montrent que la Terre n'est pas le centre de tous les mouvements célestes, que les lois de la nature sont identiques sur Terre et dans le reste de l'univers. Il n'y a donc plus de raison de placer la Terre au centre de l'univers. Par la suite, Galilée enseignera la théorie copernicienne : il poursuit ses recherches sans trop de risques, dans la mesure où l'Inquisition n'était pas très puissante à Padoue, une ville appartenant à l'époque à la République de Venise. Continuant ses observations astronomiques, il découvre les phases de Vénus, qui sont, selon lui, une nouvelle preuve de la théorie copernicienne.

Les choses se corsent lorsque l'astronome affirme que les récits de la Bible ne devraient pas être pris en compte au sein des débats relatifs à la Nature. S'ensuivront de nombreuses attaques provenant de plusieurs ennemis, notamment des adeptes des théories aristotéliciennes. Convoqué à Rome devant le Saint-Office en 1616, Galilée est sommé de se taire. En 1623, le pape Urbain VIII l'avertit que l'Église est limitée en termes de tolérance. L'intéressé obtiendra tout de même le droit de publier certains ouvrages et, ne prenant pas au sérieux les mises en garde du pape, il publie en 1632 Dialogue sur les deux grands systèmes du monde. C'est un livre dans lequel il se moque clairement du géocentrisme hérité de l'Antiquité. Cela suscite la colère de l'Église et du Pape Urbain VIII, qui se hâte de le convoquer, alors que le succès de l'ouvrage se dessine. Durant des mois, les interrogatoires s'enchaînent. Le 22 juin 1633, la sentence est rendue :

> « Il est paru à Florence un livre intitulé Dialogue des deux systèmes du monde de Ptolémée et de Copernic dans lequel tu défends l'opinion de Copernic. Par sentence, nous déclarons que toi, Galilée, t'es rendu fort suspect d'hérésie, pour avoir tenu cette fausse doctrine du mouvement de la Terre et repos du Soleil. Conséquemment, avec un cœur sincère, il faut que tu abjures et maudisses devant nous ces erreurs et ces hérésies contraires à l'Église. Et afin que ta grande faute ne demeure impunie, nous ordonnons que ce Dialogue soit interdit par édit public et que tu sois emprisonné dans les prisons du Saint-Office. »

Galilée cède sous la menace de la torture et est contraint de prononcer une formule d'abjuration rédigée par le Saint-Office. Il est ensuite assigné à résidence à Florence et mourra en 1642, à l'âge de 77 ans.

E pur si muove! (« Et pourtant elle tourne ») : c'est probablement une citation inauthentique : cette rétractation l'aurait immédiatement fait passer pour relaps et aurait pu lui faire risquer le bûcher.

■ Outre son travail en astronomie, Galilée est reconnu comme physicien : il met en place la démarche expérimentale. Par exemple, pour prouver que la chute des corps est un mouvement uniformément accéléré :

1. Il essaie de distinguer les facteurs influant sur le mouvement de chute d'un objet qu'on lâche (poids, résistance de l'air).
2. Il fait l'hypothèse que ce mouvement suit une certaine loi mathématique (Il fait abstraction de la résistance de l'air) : celle où la vitesse augmente proportionnellement au temps de chute.
3. Il tire alors une conséquence mathématique de son hypothèse : la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps.
4. Il élabore une expérience susceptible de confirmer, ou pas, la prédiction construite en 3. Il exécute l'expérimentation, qui valide la loi dont il a fait l'hypothèse en 2.

Il s'intéresse également au mouvement d'un pendule.

■ Galilée est également un inventeur : on lui doit le télescope, le développement du microscope, le compas proportionnel et l'horloge à balancier.

■ En mathématiques, il a surtout donné une place fondamentale à la matière :

> « La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur. »

Conclusion

Bien sûr, la fabuleuse histoire des mathématiques ne s'arrête pas là : nombre de mathématiciens célèbres ont œuvré par la suite (certains apparaissent en note dans les pages de ce livre).

On découvre ici la genèse des mathématiques, en comprenant qu'indissolublement liés à cette matière si abstraite, des hommes passionnés ont construit la base du logos mathématique. Des liens unissent ces mathématiciens entre eux, les suivants continuant les travaux des précédents, créant ainsi de nouveaux outils pour résoudre les problèmes.

Mathématique vient du grec ancien *mathematikos* (« qui désire apprendre »), lui-même dérivant du grec *mathêma* (« ce qui est enseigné ») On voit donc que c'est l'essence même de cette matière que de croître avec les différents acteurs de son histoire. On ne peut qu'être admiratif devant la créativité qui préside aux raisonnements mathématiques, d'autant plus que les démonstrations figurant dans ce livre sont transcrites avec les notations modernes, ce qui simplifie considérablement la tâche, par comparaison avec les notations lourdes qui étaient en usage à l'époque. Par ailleurs, les calculs de racines carrées, notamment, sont de nos jours effectués avec une calculatrice ; mais il faudrait garder à l'esprit que tous les calculs réalisés par les mathématiciens d'alors ont été faits à la main, ce qui est déjà, en soi, un véritable tour de force.

Les notions mathématiques abordées dans ce livre sont du niveau collège amélioré : les démonstrations y apparaissant, bien que certaines soient un peu délicates, font rarement intervenir des notions inconnues à un collégien. Les notions d'un niveau plus élevé, comme les nombres complexes et les logarithmes, n'y sont définies que sommairement. Malgré tout, pour la résolution des équations du 3^e et du 4^e degré, on s'est servi de la technique de résolution des équations du second degré, qui, bien qu'expliquée dans le livre, fait appel, dans sa version moderne, à une méthode vue au lycée. Mais, une fois encore, il s'agissait ici de montrer l'évolution d'une notion, d'Archimède à Napier, d'Al Khwarizmi à Ferrari ou encore d'Aristarque à Galilée : une continuité dans la rupture, en quelque sorte.

Bibliographie et webographie

Histoire générale des sciences, Presses universitaires de France, 1957

La science antique et médiévale, Presses universitaires de France, 1957

Histoire universelle des chiffres, Georges Ifrah, France Loisirs, 1995

Des mathématiciens de A à Z, B. Hauchecorne et D. Surateau, Ellipses,1996

Le théorème du Perroquet, D. Guedj, Seuil, 1998

Le livre des nombres, John H. Conway et Richard K. Guy, Eyrolles,1998

Pythagore & Thalès, ACL Les éditions du Kangourou, 1998

Dictionnaire historique de la langue française, Le Robert, 1998

Sur les traces de l'homo mathematicus, B. Duvillié, Ellipses, 1999

Histoires de maths, A. Deledicq et D. Izoard, ACL Les éditions du Kangourou, 2000

Nombre d'or et Mathématiques, Christian Hakenholz, Chalagam édition, 2001

Les cheveux de Bérénice, D. Guedj, Seuil, 2003

Mathématiciennes (de l'antiquité au XIX^e siècle), Textes & conférences mathématiques, n°3, Les Éditions du Kangourou, 2004

L'astronomie, Tangente Hors-Série n°21, POLE, 2005

Les équations algébriques, Tangente Hors-Série n°22, POLE, 2005

Cryptographie et codes secrets, Tangente Hors-Série n°26, POLE, 2006

Histoire des mathématiques de l'antiquité à l'an mil, Tangente Hors-Série n°30, POLE, 2007

Jeux, défis et découvertes mathématiques, Les malices du Kangourou, ACL Les éditions du kangourou, 2007

Alexandrie, Paul-André Claudel, Ellipses, 2011

Jeux et tours de nombres, ACL Les éditions du kangourou, 2011

Les secrets du cosmos, Jean Audouze et Johan Kieken, Vuibert, 2016

Grains de sable d'Archimède

L'Arénaire, Marc Szwajcer

➟ *http ://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/arenaire.htm*

Papier

Mille et une feuilles, Stéphanie Rivier

➟ *https ://www.milleetunefeuilles.fr/histoire-du-papier*

Calendrier

François Biraud et Mohammad Heydari-Malayeri

➟ *http ://aramis.obspm.fr/~heydari/divers/biraud-mhm-Astronomie.pdf*

Gerber d'Aurillac

Émile Gebhart

➟ *http ://www.biblisem.net/etudes/gebhhist.htm*

Les algébristes italiens de la renaissance et l'introduction des nombres complexes

IREM université de Clermont-Ferrand

➟ *http ://www.irem.univ-bpclermont.fr/ INTRO_HISTORIQUE_AUX_NBES_COMPLEXES.pdf*

Simon Stevin

La Disme, Ad Davidse

➟ *https ://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html*

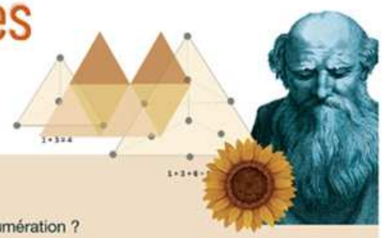
Galilée

Science post, Yohan Demeure

➟ *https ://sciencepost.fr/biographie-galilee-1564-1642-celui-qui-fera-definitivement-avancer-le-systeme-de-copernic/*

Si vous souhaitez quelques informations complémentaires sur Hypatie, la seule mathématicienne du livre, je vous conseille le film *Agora*, d'Alejandro Amenabar, sorti en 2009.

Histoire et légendes mathématiques



- Comment est né notre système de numération ?
- Quel secret cache le nombre ?
- Dans quel but a-t-on inventé l'algèbre, conceptualisé les algorithmes ?
- Quand a-t-on découvert que la Terre tournait autour du Soleil ?
- Qui est à l'origine de la gamme musicale ?

Vous découvrirez ici les réponses à ces questions (et à bien d'autres), ainsi que la vie de ceux qui leur ont donné naissance. Parfois attachants, parfois mystérieux, parfois intrigants, mais toujours géniaux, ces hommes ont compris que leur pensée ouvrait un accès à la diversité du réel : afin d'appréhender et de comprendre le monde, ils ont construit l'univers mathématique.

Dans ce livre, on évoquera également la dimension légendaire qui accompagne souvent les principales démonstrations et découvertes mathématiques, l'objectif étant de donner un aperçu tout à la fois du génie des mathématiciens et de l'inévitable part de merveilleux qui s'insère dans leur histoire. Quant aux démonstrations, elles suivent la méthode du mathématicien qui les a produites, en utilisant toutefois les lettres de notre alphabet (et non les lettres grecques) et notre écriture, ce qui est certes anachronique, mais simplifie la compréhension des raisonnements.

Ceux-ci relèvent, dans leur majorité, du niveau d'un collégien intéressé et de celui d'un lycéen pour les autres. Qu'il s'agisse de l'aspect biographique ou plus purement mathématique de l'ouvrage, l'un comme l'autre pourront également intéresser un étudiant ou un professeur en quête d'une anecdote ou d'un repère épistémologique.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 075443